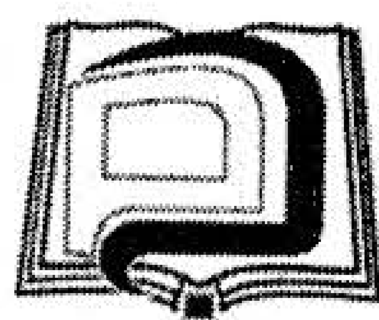
د ـ عبد العزيز شرابي
أستاذ بجامعة قسنطينة

الرياضيات الاقتصادية

المصفوفات

الطبعة الثالثة



ديوان المطبوعات الجامعية

رقم النشر: 4.01.3605
رقم ر.د.م.ك: (ISBN): 978.9961.0.0412.8
رقم الإيداع القانوني: 515-1999

مقدمـــــة :

نكاد اليوم ألا نعثر على فرع واحد من فروع المعرفة الذي لا يستخدم الرياضيـــــات كأداة في الدراسة و التحليل، و ميزة الاختصاصي الجيد، الاهتمام بأدوات عمله .

ان اقتحام المعرفة الاقتصادية و الانتقال من الظاهر الى الجوهر يتطلب من الاقتصادي المعاصر اعدادا رياضيا جيدا ، و من أهم الأد وات الرياضية التي ينبغي على الاقتصـــــادي معرفتها و التي شاع استخدامها في الاقتصاد، جبر المصفوفات نظرا لما تتيحه لنا من القدرة على تصوير العلاقات بين الظواهر و الهياكل الاقتصادية و ديناميكياتها عبر الزمن. ان المصفوفات وسيلة منظمة لكتابة المعطيات الاقتصادية كما أنها وسيلة فعالة و سريعة لاجراء العمليـــات الحسابية .

هذا العمل الذي بين أيديكم موجه بالدرجة الأولى الى طلبة الليسانس في العلــــوم الاقتصادية ، و رغم وجود العديد من المؤلفات في موضوع جبر المصفوفات الا أن ميزة هذا العمل هو بساطة العرض و جعل الموضوع في متناول الاقتصادي خاصة و أن موضوع المصفوفات يعتبـــر جديدا بالنسبة للطالب الذي لم يدرس المصفوفات في مراحل التعليم السابقة .
و قد قسمنا هذا العمل الى تسعة فصول في نهاية كل فصل مجموعة من التمارين تساعد الطالـــب عند حلها على فهم شامل للموضوع .

نتمنى أن نكون قد ساهمنا و لو بقليل في تذليل معاناة الطالب من مشكلة نقــــص المراجع خاصة باللغة العربية ، و سنكون شاكرين لكل من تقدم بملاحظاته حول هذا العمـــل لأن ذلك سيكون حافزا لنا في تطوير و تحسين الطبعة القادمة .

د. عبدالعزيز شرابـــي

1991.05.04

الفصل الأول : مفهوم المصفوفة و بعض أنواعها :

1-1- تعريف المصفوفة :

المصفوفة هي مجموعة من العناصر مرتبة في أسطر عددها m و أعمدة عددها n و تحاط هذه الأسطر و الأعمدة بقوسين حيث n و m عددان صحيحان موجبان.

يرمز عادة للمصفوفات بالأحرف الكبيرة ...A, B, C و لعناصرها بالأحرف الصغيرة ...a, b, c و ترفق العناصر الصغيرة هذه بالدليلان i و j ليدل i على رقم السطر و j على رقم العمود و هكذا فان العناصر تكتب... a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} حيث i=1,2,3... m و j=1,2,3... n

و هذا الشكل العام للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

يمكن كتابة هذه المصفوفة باختصار $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ حيث a_{ij} هو العنصر العام في المصفوفة A و الذي يقع في السطر i و العمود j .

يمكن أن نصادف حروف أخرى للدلالة على عدد الأسطر و عدد الأعمدة في المصفوفة كأن يكون P x S أو L x K بدلا من m x n كما أنه يمكن مصادفة رموز أخرى لتدل عن رقم السطر و رقم العمود بدلا من الدليلان i و j و يمكن مصادفة أشكال أخرى لكتابة المصفوفة (بدلا من الذي رأيناه سابقا).

ففي بعض الكتب نصادف الأشكال التالية :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} , \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{Vmatrix}$$

و بالتالي تكون الكتابة المختصرة لهذه الأشكال $A = (a_{ij})_{m.n}$, $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$

و تستخدم بعض الكتب الكتابة a_i^j بدلا من a_{ij} .

ان شكل المصفوفة دوما رباعي. فاما أن $m = n$ فنقول أن المصفوفة مربعة أو $m \neq n$ فنقول أن المصفوفة مستطيلة.

1-2-درجة المصفوفة : اذا كانت لدينا $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ فان أبعاد المصفوفة (عدد السطور و عدد الأعمدة) m و n تسمى بدرجة المصفوفة.

فاذا كانت $m \neq n$ نقول أن المصفوفة من الدرجة $m \times n$ أما اذا كانت المصفوفة مربعة أي $m = n$ فنقول باختصار أن المصفوفة من الدرجة n.

فاذا كانت لدينا المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

نقول أن المصفوفة A هي من الدرجة 2 أما المصفوفة B فهي من الدرجة 4 × 2.

نعود الى مفهوم المصفوفة من خلال المثال الاقتصادي التالي :

اذا كانت لدينا بيانات حول المبيعات السنوية لاحدى الشركات حسب مناطق البيع I ، II ، III و حسب ثلاثة أنواع من السلع A, B, C.

البيانات موضحة في الجدول التالي :

المبيعات السنوية للشركة (مليون دج)

أنواع السلع	مناطق البيع		
	I	II	III
A	98	24	42
B	39	15	22
C	22	15	17

يمكن كتابة محتوى الجدول على شكل مصفوفة و لنسميها المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة A تحتوي على 3 سطور و 3 أعمدة ، انها مربعة و من الدرجة 3 و يمكن كتابتها باختصار $A = \left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ حيث $i = 1,2,3$ ، $j = 1,2,3$.

يلاحظ أن موقع كل رقم له معناه الخاص في هذه المصفوفة . فمثلا 39 الذي يقع في السطر الثاني و العمود الأول (a_{21}) يدل على قيمة المبيعات من السلعة B في منطقة البيع رقم I. و الرقم 17 الذي يقع في السطر الثالث و العمود الثالث (a_{33}) فهو يدل على قيمة المبيعات من السلعة C في منطقة البيع رقم III و هكذا.

يلاحظ أن المصفوفة هي وسيلة منظمة لترتيب البيانات كما أنها وسيلة هامة و سريعة لاجراء العمليات الحسابية كما سنرى فيما بعد.

و تجدر الاشارة الى أن جميع العناصر المشكلة لمصفوفة لها كناية واحدة فعناصر المصفوفة A السابقة جميعها تعبر عن قيمة المبيعات من السلعة i في منطقة البيع j . كما أن وحدة القياس بالنسبة لجميع عناصر هذه المصفوفة واحدة ، حيث لا يجوز أن تحتوي مصفوفة واحدة على عناصر لها كنايات مختلفة كأن تدل مثلا بعض العناصر على قيمة المبيعات و بعضها الآخر عن تكاليف الانتاج.

3-1- التعريف برمز الجمع $\sum$:

نظرا لكثرة عمليات الجمع في المصفوفات نسبيا بالمقارنة مع العمليات الجبرية الأخرى فانه ينبغي التعريف بالرمز المستخدم في عمليات الجمع.

نفترض أننا نريد جمع خمسة أعداد a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 أن مجموعهم هو: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

أي مجموع a_i حيث $i = 1,2,3,4,5$ و يمكن الاستغناء عن هذه الكتابة باستخدام الرمز الاغريقي الحرف سيقما ـ $\sum$ لنكتب :

$$\sum_{i=1}^{5} a_i$$

و يمكن تعميم استخدام الرمز $\sum$ في حالة وجود n من الأعداد المراد جمعها لنكتب :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

و تجدر الاشارة الى أنه ليس حتما أن يبدأ الدليل i بـ $i = 1$ فاذا كانت لدينا الأعداد $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$ و أريد الحصول فقط على مجموع الأعداد $x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$ فاننا نكتب :

$$\sum_{i=3}^{7} x_i$$

كما أنه لا يوجد أي مانع في أن نجمع كل الأعداد ما عدى أحدها أو بعضها كأن يراد الحصول

على مجموع القيم : $x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$ (أي باستثناء x_3) لنكتب عندئذ :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{7} x_i$$

يمكن أن نصادف تأليفه من الأعداد مثلا q_i p_i و أريد جمع حواصل الضـــــــــــــــرب :

$p_1\ q_1,\ p_2\ q_2,\ p_3\ q_3$ فاننا نكتب $\sum_{i=1}^{3} p_i\ q_i$ و هكذا بالنسبة لأكثر من جذائيــــــن.

و الآن نأتي الى الحالة التي يكون للرقم ليس دليل واحد كما رأينا سابقا بل دليلان i و j كما هو الحال بالنسبة للمصفوفات حيث لكل عنصر في مصفوفة دليلان، i ليدل على رقم السطر و j ليدل على رقم العمود.

فاذا كانت لدينا مصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

و أريد الحصول على مجموع عناصر السطر الأول، هنا نلاحظ ثبات الدليل i $(i = 1)$ و تغيـــر الدليل j $(j = 1,2,3)$ و نكتب :

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j} = a_{11} + a_{12} + a_{13}$$

أما مجموع عناصر السطر الثاني فنكتب :

$$\sum_{j=1}^{3} a_{2j} = a_{21} + a_{22} = a_{23}$$

نأتي الآن على الأعمدة لنجد أن مجموع عناصر العمود الأول تكتب بوضع j ثابتا $(j = 1)$ و i متغيرا $(i = 1,2)$ لنكتب :

$$\sum_{i=1}^{2} a_{i1} = a_{11} + a_{21}$$

و بنفس الطريقة نحصل على مجموع عناصر العمود الثاني :

$$\sum_{i=1}^{2} a_{i2} = a_{12} + a_{22}$$

و كذلك مجموع عناصر العمود الثالث :

$$\sum_{i=1}^{2} a_{i3} = a_{13} + a_{23}$$

و أخيرا نفترض أننا نريد الحصول على مجموع عناصر المصفوفة A ، نلاحظ أن هناك طريقتان :

1ـ اما أن نجمع مجموع الأسطر :

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{2} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3})$$

$$= (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23})$$

2ـ اما أن نجمع مجموع الأعمدة :

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{3} (a_{1j} + a_{2j})$$

$$= (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23})$$

نلاحظ أن :

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij} \right)$$

و يمكن ازالة الأقواس لنكتب :

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}$$

و منه يمكننا تعميم هذه الكتابة بافتراض أن المصفوفة تحتوي على m سطر و n عمود لنكتب :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

ان الطرف الأيسر من المعادلة يعبر عن مجموع عناصر المصفوفة حسب الأسطر، أما الطـــــرف

الأيمن من المعادلة فهو يعبر عن مجموع عناصر المصفوفة حسب الأعمدة و ذلك في مصفوفة من الدرجة $m \times n$.

ملاحظة : يمكن مصادفة بعض الحالات الخاصة في عمليات الجمع كأن يكون مثلا مجموع العناصر المفروضة بدون دليل :

$$\sum_{i=1}^{4} x = x + x + x + x = 4x$$

و نعمم ذلك لنكتب :

$$\sum_{i=1}^{n} x = n\,x$$

و حالة أخرى عندما تكون جميع العناصر المفروضة مضروبة بعدد ثابت ما :

$$\sum_{i=1}^{3} k\,y_i = ky_1 + ky_2 + ky_3 = k \sum_{i=1}^{3} y_i$$

و نعمم ذلك لنكتب :

$$\sum_{i=1}^{n} k\,y_i = k \sum_{i=1}^{n} y_i$$

و نشير الى وجود حرف اغريقي آخر " بي ـ Π " ليدل على عملية الضرب.

فاذا كان :

$$\sum_{i=1}^{5} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

فان :

$$\prod_{i=1}^{5} b_i = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$$

و كل ما ذكر فيما يخص $\sum$ بالنسبة للجمع يمكن تطبيقه بالنسبة الى Π ، فقط بدل الجمع نقوم بالضرب.

1-4- بعض الأنواع الهامة من المصفوفات :

سنذكر هنا بعض الأنواع (الأشكال) الهامة للمصفوفات التي لها صلة بالتطبيقات الاقتصادية :

(1) ـ المصفوفة المربعة و المصفوفة المستطيلة :

اذا كان عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة في المصفوفة أي $n = m$ نقول أن المصفوفـــة مربعة ، أما اذا كانت $n \neq m$ نقول بأن المصفوفة مستطيلة . فاذا كانت لدينا المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

فاننا نقول أن المصفوفة A مربعة أما B و C فهما مصفوفتان مستطيلتان.

(2) ـ المصفوفة القطرية :

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها معدومة ما عدى عناصر القطر الرئيسي :

$a_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$

$a_{ij} \neq 0$ عندما $i = j$

مثلا المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفة قطرية .

(3) ـ المصفوفة السلمية (القياسية) :

هي مصفوفة قطرية فيها جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية :

$a_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$

$a_{ij} = k$ عندما $i = j$

مثلا المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفة سلمية .

(4) ـ المصفوفة الأحادية :

هي مصفوفة قطرية فيها جميع عناصر القطر الرئيسي تساوي 1.

$a_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$

$a_{ij} = 1$ عندما $i = j$

مثلا المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفة أحادية من الدرجة 3.

(5) ـ المصفوفة المثلثية الى أعلى :

هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة .

$a_{ij} = 0$ عندما $i > j$

مثلا المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفة مثلثية الى أعلى.

ملاحظة : القطر الرئيسي في المصفوفة هو عبارة عن العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33} \cdots a_{nn}$

(6) ـ المصفوفة المثلثية الى أسفل :

هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة .

$a_{ij} = 0$ عندما $j > i$

فمثلا المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفة مثلثية الى أسفل.

(7) ـ المصفوفة المتناظرة :

هي مصفوفة مربعة العناصر المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية .

$a_{ij} = a_{ji}$ عندما $i \neq j$

فالمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفة متناظرة .

لأن : $a_{12} = a_{21} = -1$ ، $a_{13} = a_{31} = 4$ ، $a_{23} = a_{32} = 0$

(8) ـ المصفوفة المتناظرة عكسيا :

هي مصفوفة مربعة العناصر المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية بالقيمة المطلقة و **متعاكسة في** الاشارة كما أن عناصر القطر الرئيسي فيها معدومة .

$a_{ij} = -a_{ji}$ عندما $i \neq j$

$a_{ij} = 0$ عندما $i = j$

فالمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفة متناظرة عكسيا .

(9) ـ المصفوفة الصفرية :

هي مصفوفة جميع عناصرها معدومة ، و المصفوفة الصفرية لا يشترط أن تكون مربعة .

$a_{ij} = 0$ مهما كان i و j .

مثلا المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

، هي مصفوفات صفرية .

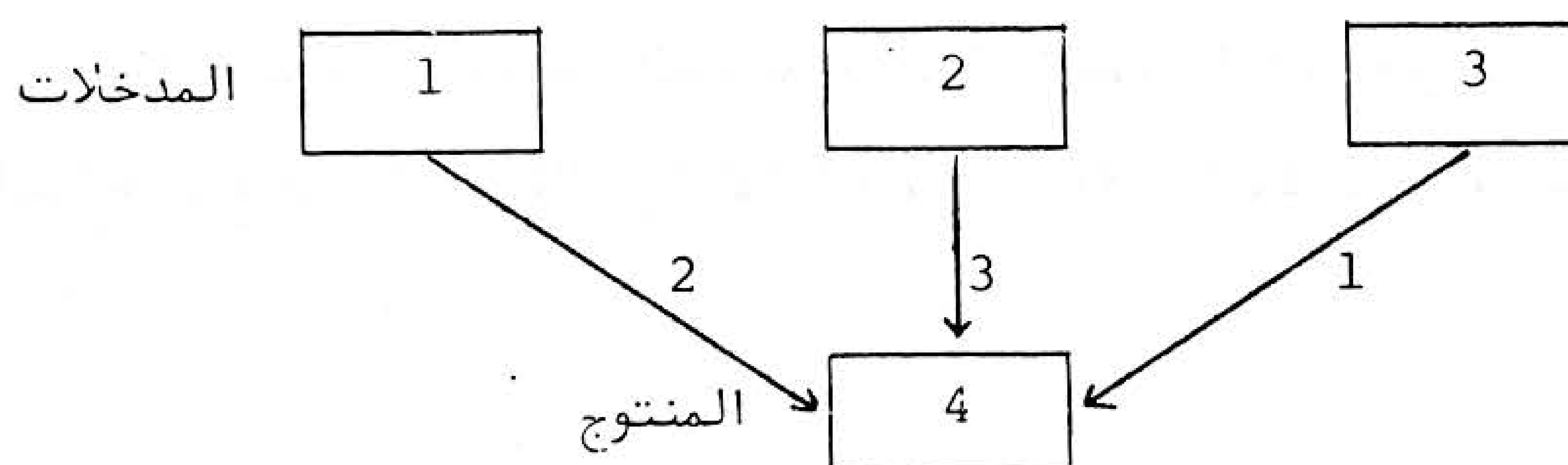
(10) ـ مصفوفة السطر و مصفوفة العمود :

اذا احتوت مصفوفة على سطر واحد فقط $m = 1$ نقول أنها مصفوفة سطر (أو شعاع سطر). أما اذا كان $n = 1$ فنقول أنها مصفوفة عمود (أو شعاع عمود).

فالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ، هي مصفوفة عمود، أما المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، فهي مصفوفة سطر .

(11) ـ مصفوفة الاسقاط (التلاقي) و مصفوفة العلاقات :

عادة ما تواجه الاقتصادي مسألة دراسة العلاقات ، الارتباطات بين موضوعين أو أكثر . فمثلا من أجل انتاج وحدة واحدة من المنتوج رقم ـ 4 يجب استخدام قطعتان من المنتوج رقم ـ 1 و ثلاثة قطع من المنتوج رقم ـ 2 و قطعة واحدة من المنتوج رقم ـ 3. يمكننا أن نوضح هذه العلاقة بالاستعانة بالشكل التالي :



ان " مصفوفة الاسقاط ـ Matrice d'incidence " لهذه المعطيات هي :

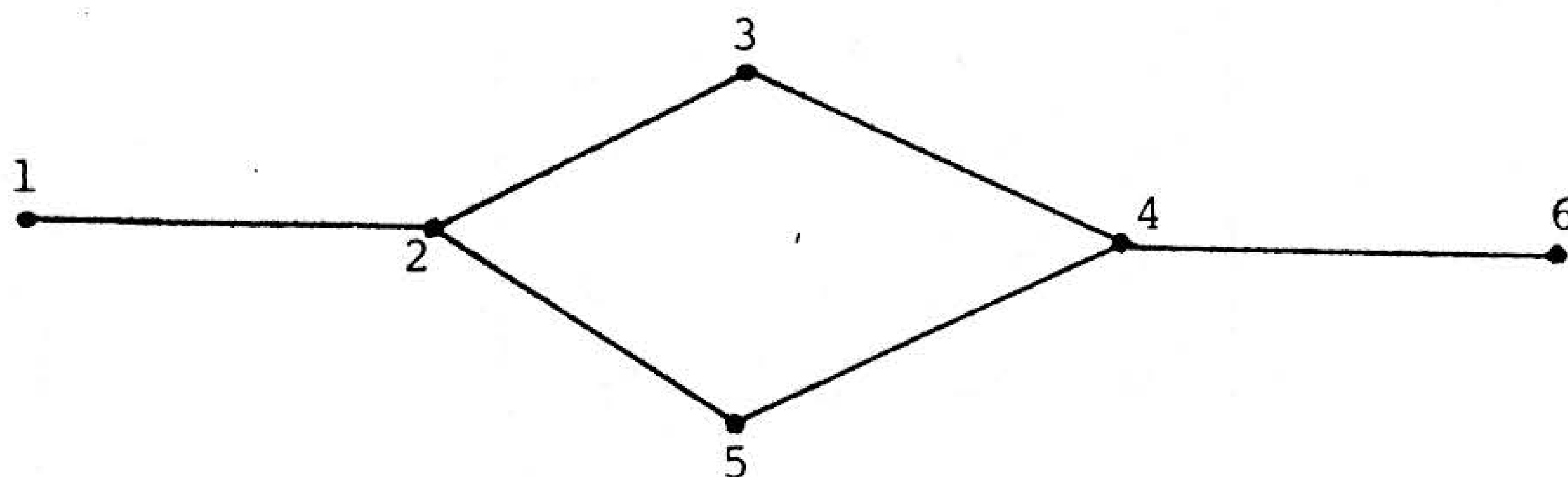
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة تعبر عن وجود العلاقة معبرا عنها بـ 1 أو عدم وجود العلاقة معبرا عنها بـ 0.
أما اذا رغبنا في أن تعبر هذه المصفوفة ليس فقط على وجود أو عدم وجود العلاقة، بل أيضا على حجم هذه العلاقة فان ذلك يكون عن طريق " مصفوفة العلاقات "، و بالنسبة لمثالنا فان مصفوفة العلاقات المقابلة له هي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هناك أيضا ما يسمى " بمصفوفة الاسقاط البياني " و أهميتها تبرز عند التعبير الرياضي للعلاقات بين المواضع المختلفة في الاقتصاد خاصة عند دراسة مسألة النقل بين النقاط المختلفة ، بين المدن.

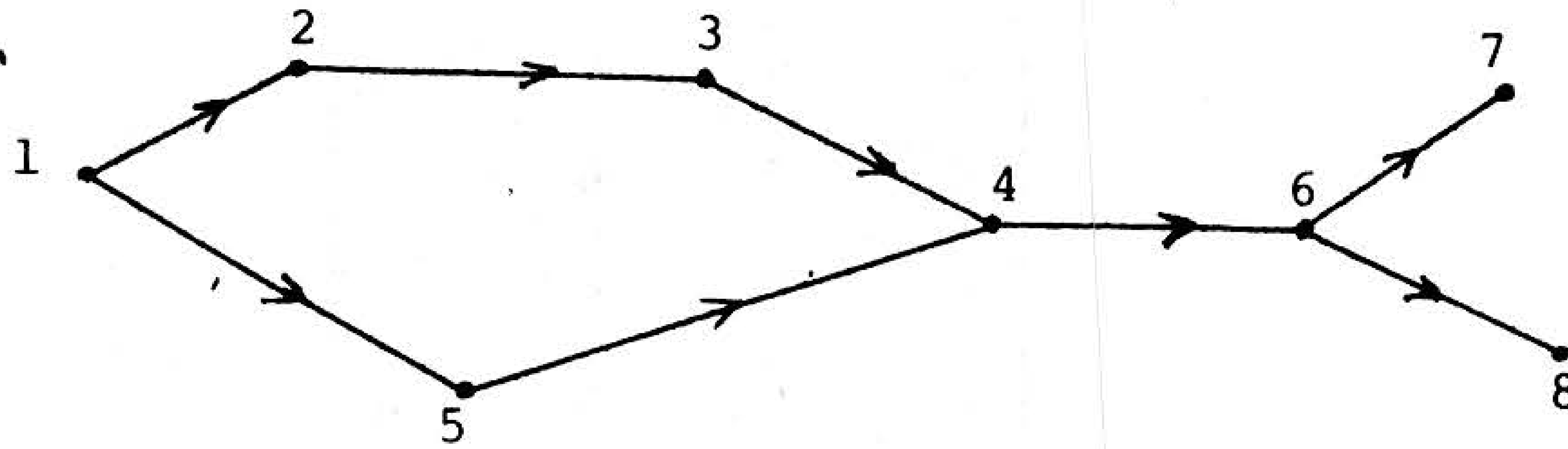
فاذا كان لدينا الرسم البياني غير الموجه التالي :



فان مصفوفة الاسقاط البياني المقابلة له هي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أما بالنسبة للرسم البياني **الموجه** التالي :



فان مصفوفة الاسقاط البياني المقابلة له هي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1-5- أثر المصفوفة :

اذا كانت لدينا المصفوفة المربعة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فان العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33} \cdots a_{nn}$ تسمى بعناصر القطر الرئيسي للمصفوفة و مجموعها $(a_{11} + a_{22}\ a + a_{33} + \ldots + a_{nn})$ يسمى بأثر المصفوفة A .

و يكتب أثر المصفوفة A باختصار : $tr\ A = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij}$

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فان : $tr\, A = 1 + 7 + 2 = 10$

أما بالنسبة للمصفوفات المستطيلة فانه لا يتم تحديد أثرها (أثرها غير معرف).

1ـ6ـ منقول المصفوفة :

اذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فان منقولها هو عبارة عن قلب أسطر هذه المصفوفة الى أعمدة و الأعمدة الى أسطر و يرمز لمنقول المصفوفة A بـ 'A .

اذا :

$$A' = \left[a_{ji}\right]_{n \times m} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ملاحظة : يرمز لمنقول المصفوفة في بعض المراجع بـ A^t .

مثال 1ـ : اذا كانت لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

فان :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

مثال 2ـ : اذا كانت $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ فان $B'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

1ـ7ـ خصائص منقول المصفوفة :

1ـ منقول منقول مصفوفة هو عبارة عن المصفوفة الأصلية أي : $(A')' = A$

2ـ $(A \pm B)' = A' \pm B'$

3ـ $(AB)' = B'A'$ و كذلك في حالة أكثر من مصفوفتين : $(A\ B\ C)' = C'B'A'$

4ـ $(\lambda A)' = \lambda A'$ حيث λ عدد ما.

5ـ اذا كانت المصفوفة A متناظرة فان $A' = A$.

تماريــــــن :

ـ أكتب المصفوفات التالية :

1ـ $A = \left[a_{ij}\right]_{2x3}$

2ـ $B = \left[b_{is}\right]_{3x2}$

3ـ $C = \left[c_{ij}\right]_{4x2}$

4ـ $D = \left[d_{ij}\right]_{1x3}$

5ـ I_2 , I_4 , I_5

6ـ $A = \left[a_{ij}\right]_{3x4}$ حيث : $a_{ij} = ij - 1$

7ـ $B = \left[b_{ij}\right]_{3x4}$ حيث : $b_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$

و : $b_{ij} = 2i^2 - 2j$ عندما $i = j$

8ـ $C = \left[c_{ij}\right]_{2x5}$ حيث : $c_{ij} = 0$ من أجل $i > j$

و : $c_{ij} = ij^2 - 2j$ من أجل $i \leqslant j$

9ـ $D = \left[d_{ij}\right]_{4x6}$ حيث : $d_{ij} = i^3 - 2j^2 + 4j$

10ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 17 & 31 & 26 & 11 \\ 11 & 27 & 16 & 14 \\ 21 & 23 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

المطلوب أ ـ حساب المقدار :

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i2}$$

ب ـ حساب المقدار :

$$\sum_{i=j=1}^{3} a_{ij}$$

جـ ـ حساب المقدار :

$$\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$$

د ـ حساب المقدار

$$\sum_{j=1}^{4} a_{3j}$$

و ـ تأكدان :

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$$

هـ ـ تأكدان :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^{4} a_{ij} = 119$$

11ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

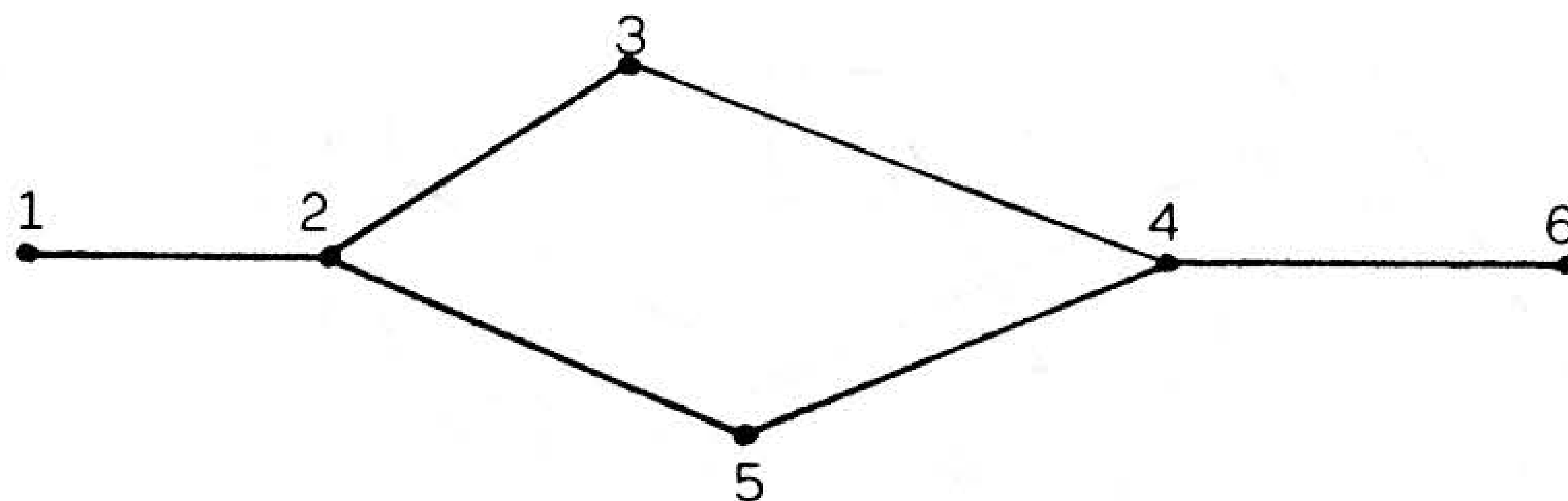
$$B = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

أ ـ ما نوع هذه المصفوفة ؟

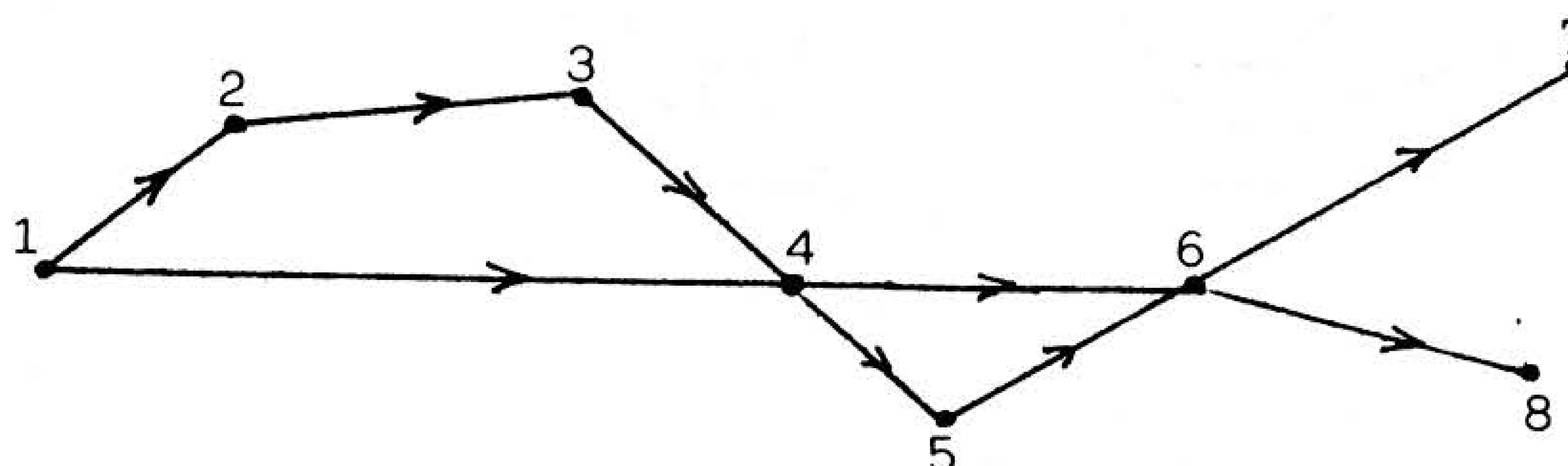
ب ـ أحسب المقادير التالية :

$$\sum_{i=j=1}^{3} b_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} b_{i2} \quad , \quad \sum_{j=1}^{3} b_{3j}$$

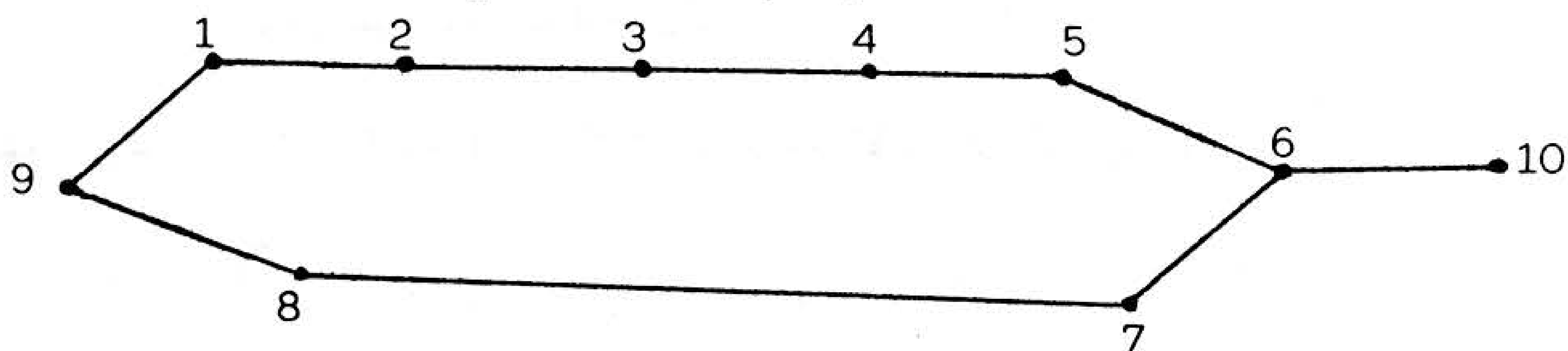
12ـ أكتب مصفوفة الاسقاط للرسم البياني غير الموجه التالي :



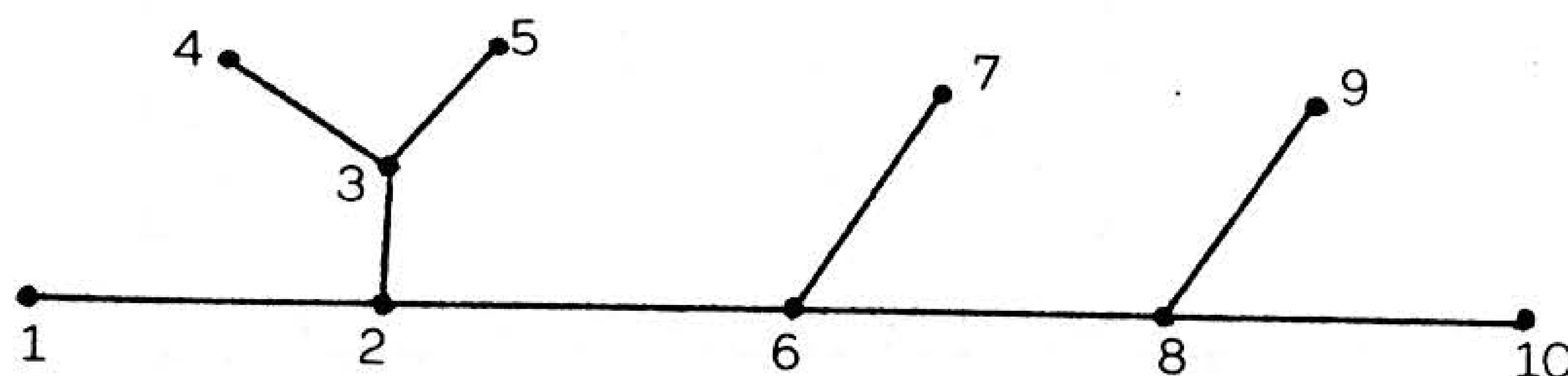
13ـ أكتب مصفوفة الاسقاط للرسم البياني الموجه التالي :



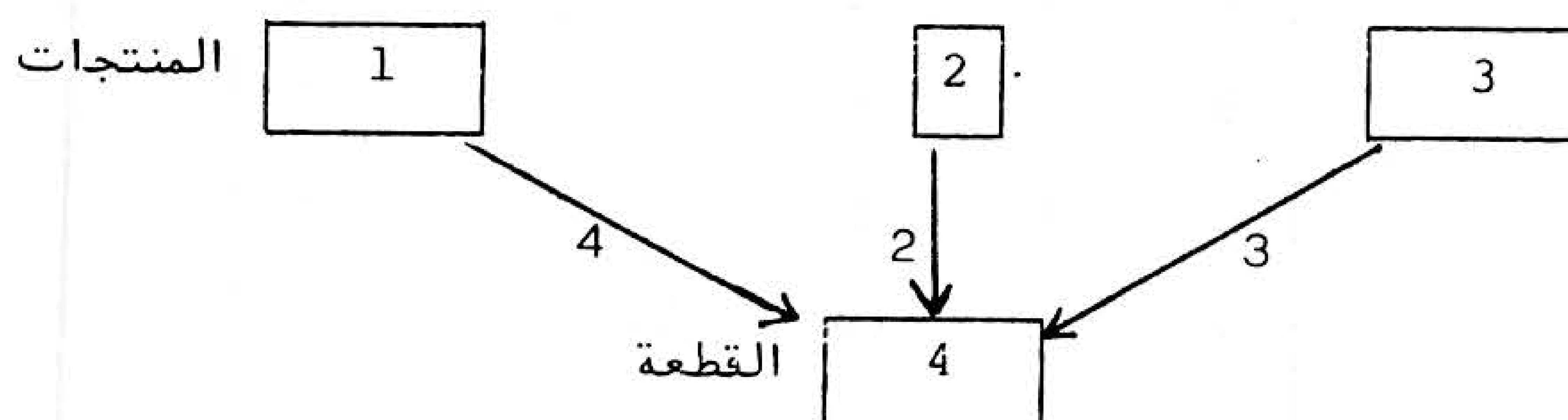
14ـ أكتب مصفوفة الاسقاط للرسم البياني غير الموجه التالي :



15ـ أكتب مصفوفة الاسقاط للرسم البياني غير الموجه التالي :



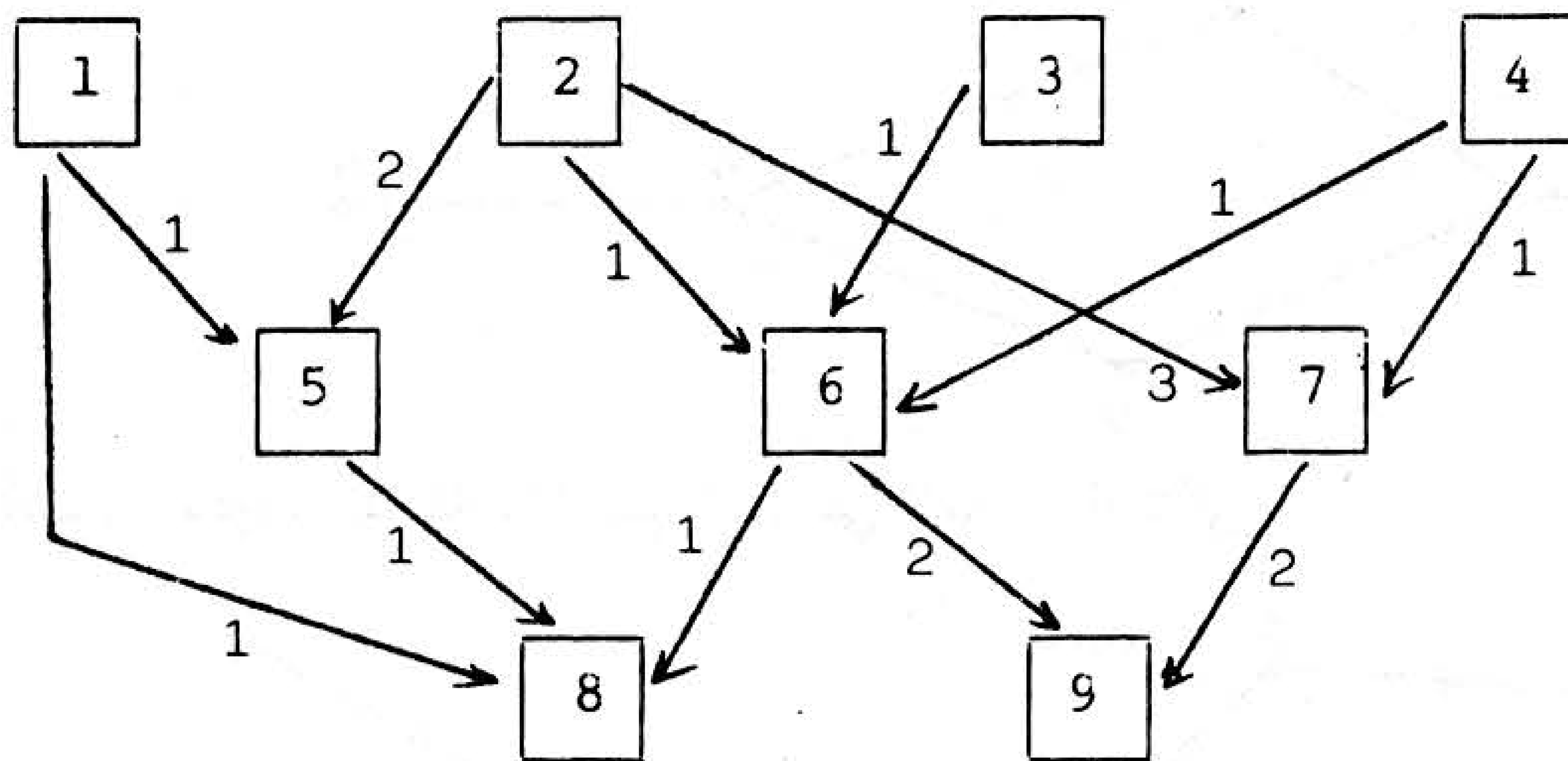
6ـ اذا كانت ثلاثة منتجات 1، 2، 3 تدخل في انتاج القطعة 4 وفقا للكميات التالية :



أ ـ أكتب مصفوفة الاسقاط التي تعكس هذه العلاقة التكنولوجية .

ب ـ أكتب مصفوفة العلاقات التي تعكس هذه العلاقة التكنولوجية .

17ـ اذا كان الشكل التالي يعكس العلاقة التكنولوجية بين القطع الانتاجية 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، وفقا لما يلي :



المطلوب :

أ ـ كتابة مصفوفة الاسقاط لهذه العلاقات التكنولوجية .

ب ـ أكتب مصفوفة العلاقات.

18ـ أرسم الرسم البياني الموجه المقابل لمصفوفة الاسقاط التالية :

0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

19ـ أرسم الرسم البياني الموجه المقابل لمصفوفة الاسقاط التالية :

0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1

20ـ اذا كانت المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات التالية : ـ A'

ـ B'

ـ C' ـ ماذا تستنتج ؟

ـ D' ـ ماذا تستنتج ؟

21ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ أوجد المصفوفة A .

22ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$(ABC)' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات ـ $C'D'A'$

ـ $A\ B\ C$

23ـ حدد أثر المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

24ـ هل يمكن حساب أثر المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

لماذا ؟

الفصل الثاني : عمليات جبرية على المصفوفات :

2-1- تساوي مصفوفتان :

تتساوى مصفوفتان اذا وفقط اذا حققتا الشرطان :

أ - أن تكونا من نفس الدرجة .

ب - العناصر في الأماكن المتقابلة متساوية .

فالمصفوفتان : $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ و $B = \left[b_{ij}\right]_{k \times L}$ متساويتان اذا وفقط اذا كـــان

$k = m$ و $L = n$ و كذلك $a_{ij} = b_{ij}$ من أجل جميع قيم i و j .

فمثلا المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

1- يلاحظ أن المصفوفتان من نفس الدرجة 3×2.

2- أما الشرط الثاني فيجب أن تتحقق المساواة التالية .

$$a_{11} = 3 \ , \ a_{12} = 2 \ , \ a_{13} = 7$$
$$a_{21} = 1 \ , \ a_{22} = 10 \ , \ a_{23} = 2$$

2-2- جمع المصفوفات :

اذا كانت لدينا مصفوفتان $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ $B = \left[b_{ij}\right]_{k \times L}$

فان الشرط الأساسي لكي يكون A + B معرفا هو أن تكون المصفوفتان من نفس الدرجـــــــة

$k = m$ و $n = L$.

أي أن للمصفوفتان نفس عدد الأسطر و عدد الأعمدة .

عند تحقق هذا الشرط نقول أن المصفوفتان متوافقتان للجمع و نكتب :

$$A+B = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$$

حيث $i = 1, 2, 3 \dots m$. $j = 1, 2, 3 \dots n$

و المصفوفة الجديدة الناتجة تكون من نفس درجة المصفوفتان B و A .

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

نجد أن : A + B غير معرفا لأن المصفوفتان ليستا من نفس الدرجة .
كذلك B + C . بينما A + C معرفا و المصفوفتان A و C متوافقتان للجمع و مجموعهما هو مصفوفة جديدة :

$$A+C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+5 & 3-1 \\ 0+3 & -2+1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال اقتصادي : في الفصل الأول كنا قد أوردنا جدولا خاصا بمبيعات احدى الشركات بملايين الدينارات، حسب مناطق البيع I ، II ، III و حسب ثلاثة أنواع من السلع C ، B ، A و شكلنا من محتوى الجدول مصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

كانت هذه المعطيات خاصة بالسنة t و اذا افترضنا أنه لدينا أيضا بيانات حول مبيعات الشركة بملايين الدينارات خلال السنة t + 1 ممثلة في المصفوفة التالية :

$$B = \begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

و أردنا الآن الحصول على قيمة المبيعات خلال السنتين t و t + 1 حسب أنواع السلع و مناطق البيع. ان ذلك ممكن عن طريق جمع المصفوفتان :

$$A+B = \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 68 & 60 \\ 33 & 55 & 37 \end{bmatrix}$$

ان العنصر $a_{22} = 68$ و هو يدل على قيمة مبيعات الشركة خلال السنتين t و t + 1 من السلعة B في نقطة البيع رقم ـ II .

أما العنصر $a_{13} = 86$ فهو عبارة عن قيمة مبيعات الشركة خلال السنتين من السلعة A في نقطة البيع رقم ـ III .

ملاحظة : كما هو معروف لا يجوز جمع أعداد ليست لها كناية واحدة ، كذلك بالنسبة لجمع المصفوفات ، فاذا كانت لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ عناصرها عبارة عن قيمة المبيعات من السلعة i في نقطة البيع j ، و كانت لدينا مصفوفة أخرى $C = (C_{ij})_{m \times n}$ عناصرها عبارة عن تكلفة انتاج وحدة واحدة من المنتوج i في المؤسسة j . في هذه الحالة A + B ليس له معنى.

نعود الآن الى المثال السابق و نفترض أنه في السنة t + 2 فتحت نقطة بيع جديدة لدى الشركة و المصفوفة التالية تعبر عن قيمة المبيعات بملايين دج من السلع الثلاثة في نقاط البيع I ، II ، III ، IV .

$$C = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 40 & 20 \\ 50 & 45 & 40 & 10 \\ 10 & 50 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

و كان المطلوب منا حساب قيمة المبيعات لهذه الشركة خلال السنوات الثلاثة حسب أنواع السلع و نقاط البيع.

لدينا ثلاثة مصفوفات : $A = [a_{ij}]_{3x3}$, $B = [b_{ij}]_{3x3}$, $C = [c_{ij}]_{3x4}$

نلاحظ أن المجموع A + B + C غير معرفا لأن المصفوفتان A و B لا تتوافقان للجمع مع المصفوفة C . في هذه الحالة يمكن اضافة عمود رابع الى المصفوفتان A و B لتصبحا :

$$A^* = \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 & 0 \\ 39 & 15 & 22 & 0 \\ 22 & 15 & 17 & 0 \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 & 0 \\ 43 & 53 & 38 & 0 \\ 11 & 40 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

ان العمود الرابع في المصفوفة A^* يعني أن المبيعات في نقطة البيع رقم ـ 4 في السنة t كانت معدومة . كذلك العمود الرابع في المصفوفة B^* الذي يعني أن الشركة في t + 1 لم

يكن لديها أية مبيعات في نقطة البيع رقم ـ4.

و الآن يمكن اجراء عملية الجمع لأن المصفوفات A^* ، B^* ، C هي من نفس الدرجة .

$$A^*+B^*+C=\begin{bmatrix}98&24&42&0\\39&15&22&0\\22&15&17&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}55&19&44&0\\43&53&38&0\\11&40&20&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}60&20&40&20\\50&45&40&10\\10&50&20&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}213&63&126&20\\132&113&100&10\\43&105&57&30\end{bmatrix}$$

2ـ3ـ خصائص عملية الجمع في المصفوفات :

ان خصائص الجمع في المصفوفات لا تختلف عن خصائص الجمع في الجبر العادي.

1ـ الجمع تبديلي في المصفوفات : $A+B = B+A$ حيث A و B مصفوفتان متوافقتان للجمع.

البرهان : اذا كانت لدينا :

$$B = \left[b_{ij}\right] \qquad A = \left[a_{ij}\right]$$

من خصائص جمع الأعداد في الجبر العادي نجد أن :

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

و بذلك نجد من تعريف جمع مصفوفتين أن :

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] = \left[b_{ij} + a_{ij}\right] = \left[b_{ij}\right] + \left[a_{ij}\right] = B + A$$

2ـ الجمع تجميعي في المصفوفات : $A + (B+C) = (A+B) + C$

البرهان : من تعريف جمع مصفوفتين يمكننا أن نكتب :

$$A + (B+C) = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij} + c_{ij}\right]$$

و بالاستفادة من الخاصية التجميعية في جمع الأعداد نجد أن :

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

و بالتالي :

$$A + (B+C) = \left[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right] = (A+B) + C$$

و يمكن تعميم ذلك على أكثر من مصفوفتين.

3ـ المصفوفة الصفرية لها دور حيادي في جمع المصفوفات :

كما هو معروف من خصائص الجمع في جمع الأعداد فان : $A + 0 = 0 + A = A$.

كذلك بالنسبة لجمع المصفوفات بشرط أن تكون المصفوفتان A و 0 متوافقتان بالنسبة للجمع أي لهما نفس الدرجة .

مثال : اذا كانت المصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ و المصفوفة $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

فاننا نستطيع أن نكتب : $A+0 = \left[a_{ij} + 0_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ -1+0 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

2-4- طرح المصفوفات :

اذا كانت لدينا مصفوفتان : $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ $B = \left[b_{ij}\right]_{k \times L}$

فان حاصل الطرح B - A يكون معرفا فقط و فقط اذا كانت المصفوفتان من نفس الدرجة $k = m$ و $L = n$ عندئذ نكتب : $A - B = \left[a_{ij}\right] - \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]$

و المصفوفة الناتجة عن عملية الطرح تكون من نفس درجة المصفوفتان A و B .

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن A - B غير معرف لأن المصفوفتان A و B ليستا من نفس الدرجة . كذلك بالنسبة لحاصل الطرح B - C .

أما بالنسبة لـ A - C فهو معرف لأن المصفوفتان من نفس الدرجة فهما متوافقتان للطرح .

$$A - C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-5 & 3+1 \\ 0-3 & -2-1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال اقتصادي :

في الفقرة الثانية من هذا الفصل كنا قد أعطينا مصفوفتان خاصتان بقيمة المبيعات لاحدى الشركات من السلع A ، B ، C في نقاط البيع I ، II ، III المصفوفة الأولى - A خاصة بالسنة t و المصفوفة - B خاصة بالسنة t + 1 .

و هي على التوالي :

$$A = \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

لغرض التعرف على التغير (الزيادة أو النقصان) الذي حصل في قيمة المبيعات من كل نوع من أنواع السلع حسب نقاط البيع نقوم بعملية طرح المصفوفة الخاصة بالسنة t من المصفوفة الخاصة بالسنة t + 1 .

$$B - A = \left[b_{ij} - a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 55 - 98 & 19 - 24 & 44 - 42 \\ 43 - 39 & 53 - 15 & 38 - 22 \\ 11 - 22 & 40 - 15 & 20 - 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43 & -5 & 2 \\ 4 & 38 & 16 \\ -11 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

ان العدد 43ـ من المصفوفة الجديدة ، العنصر a_{11} يعني أن قيمة المبيعات من السلعة A في نقطة البيع رقم ـ I قد انخفضت في t + 1 مقارنة بالسنة t بمقدار 43 مليون دج.
بينما يعني العدد 25 العنصر a_{32} أن قيمة المبيعات من السلعة C في نقطة البيع رقم ـ II قد ارتفعت في السنة t + 1 مقارنة بالسنة t بمقدار 25 مليون دج.

2ـ5ـ ضرب مصفوفة في عدد :

اذا كانت A مصفوفة من الدرجة m x n و k عدد حقيقي فان الجداء k A هو عبارة عن ضرب كل عنصر a_{ij} من المصفوفة A بالعدد k .

فاذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فان kA هو عبارة عن:

$$kA = Ak = \left[ka_{ij}\right] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix},$$

مثال : اذا كانت : $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و كانت $k = 5$

فان :

$$kA = 5 \begin{bmatrix} 5 \,.\, 5 & 5 \,.\, -5 & 5 \,.\, 0 \\ 5 \,.\, 3 & 5 \,.\, 1 & 5 \,.\, 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -25 & 0 \\ 15 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

مثال اقتصادي :

اذا كان عدد الساعات اللازمة لانتاج قطعة واحدة من المنتوجين A و B في مختلف أقسام الانتاج في احدى المؤسسات ممثلة بالجدول التالي :

عدد الساعات اللازمة لانتاج وحدة واحدة من المنتوجين A و B .

المنتوج / الأقسام	A	B
I	1,05	1,10
II	24,00	12,00
III	1,70	2,30

فاذا أردنا معرفة الزمن اللازم لانتاج 25 قطعة من كل منتوج، فاننا نقوم بضرب كل العناصر الموجودة في الجدول بالعدد 25 و بالتعبير المصفوفي فاننا نكتب :

$$25 \begin{bmatrix} 1,05 & 1,10 \\ 24,00 & 12,00 \\ 1,70 & 2,30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,25 & 27,5 \\ 600 & 300 \\ 43,75 & 57,5 \end{bmatrix}$$

ان العدد 26,25 أي العنصر a_{11} يعني عدد الساعات اللازمة لانهاء مرحلة الانتاج فـــي

القسم الأول لانتاج 25 وحدة انتاج من المنتوج ـ A .

2ـ6ـ ضرب المصفوفات :

لتكن لدينا مصفوفتان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times p$ و $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $p \times n$ ، ان الجذاء AB هو مصفوفة جديدة و لتكن $C = [C_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$. ان العناصر C_{ij} التي تشكل المصفوفة C هي عبارة عن حواصل الضرب الناتجة عن ضرب عناصر السطر i من المصفوفة A في عناصر العمود j من المصفوفة B .

$$C_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

شرط توافق مصفوفتان للضرب :

ان الشرط الأساسي لضرب المصفوفتان A و B أي الحصول على الجذاء AB هو أن تتساوى عدد الأعمدة في المصفوفة A مع عدد الأسطر في المصفوفة B فاذا لم يتحقق هذا الشرط نقول أن المصفوفتان غير متوافقتان للضرب و أن الجذاء AB غير معرف.

فاذا كان لدينا : $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ $B = [b_{ij}]_{p \times n}$

الشرط

درجة المصفوفة الناتجة

ان هذه الكتابة تسمح لنا بالتعرف على توافق أو عدم توافق المصفوفتان بالنسبة للضرب بالاضافة الى تحديد درجة المصفوفة الجديدة الناتجة من حاصل الضرب.

مثال : اذا كانت لدينا مصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

هل يمكن الحصول على الجذاء AB ؟

من الكتابة : $AB = [a_{ij}]_{2 \times 3}\, [b_{ij}]_{3 \times 3}$

نلاحظ أن شرط الضرب محقق (عدد الأعمدة في المصفوفة A يساوي عدد الأسطر في المصفوفة B)

و المصفوفة الجديدة AB تكون من الدرجة 3 × 2.

و اذا افترضنا الآن أن المصفوفة حاصل الضرب AB هي المصفوفة $C=\left[C_{ij}\right]$ فان الحصول على عناصرها C_{ij} يتم باتباع الخطوات التالية :

1- للحصول على العنصر C_{11} ، نقوم بضرب عناصر السطر الأول من المصفوفة A في عناصر العمود الأول من المصفوفة B ، ثم تجمع حواصل الضرب.

أي : $a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31}$

2- للحصول على العنصر C_{12} ، نقوم بضرب عناصر السطر الأول من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B ، ثم نقوم بجمع حواصل الضرب.

أي : $a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32}$

3- للحصول على العنصر C_{13} ، نقوم بضرب عناصر السطر الأول من المصفوفة A في عناصر العمود الثالث من المصفوفة B ، ثم نقوم بجمع حواصل الضرب.

$a_{11}\, b_{13} + a_{12}\, b_{23} + a_{13}\, b_{33}$

4- للحصول على العنصر C_{21} ، نقوم بضرب عناصر السطر الثاني من المصفوفة A في عناصر العمود الأول من المصفوفة B ، ثم نقوم بجمع حواصل الضرب.

أي : $a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23}\, b_{31}$

5- للحصول على العنصر C_{22} ، نقوم بضرب عناصر السطر الثاني من المصفوفة B في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B ، ثم نقوم بجمع حواصل الضرب.

أي : $a_{21}\, b_{12} + a_{22} + a_{23}\, b_{32}$

6- للحصول على العنصر C_{23} ، نقوم بضرب السطر الثاني من المصفوفة A في عناصر العمود الثالث من المصفوفة B ، ثم نقوم بجمع حواصل الضرب.

أي : $b_{21}\, b_{13} + a_{22}\, b_{23} + b_{23}\, b_{33}$

و هكذا يمكننا كتابة المصفوفة الجديد الناتجة عن حاصل الضرب AB :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \end{bmatrix}$$

أما الجذاء BA فهو غير معرف لأن شرط الضرب غير محقق، المصفوفة B تحتوي على ثلاثة أعمدة بينما المصفوفة A تحتوي على سطرين فقط.

مثال ـ2 : اذا كان لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الجذاء A.B معرفا حيث :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{1x3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} 1.0 + 2.1 + (-1).4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} = -2$$

كذلك الجذاء BA معرفا حيث :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3x1} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 . 1 & 0 . 2 & 0 . -1 \\ 1 . 1 & 1 . 2 & 1 . -1 \\ 4 . 1 & 4 . 2 & 4 . -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

مثال ـ3 : اذا كان لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الجداء AB غير معرفا. بينما الجذاء BA معرفا حيث :

$$B.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} . \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 17 & 22 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

أمثلة اقتصادية :

أ ـ ضرب شعاع في شعاع :

اذا كانت حجم المبيعات لاحدى الشركات خلال السنة معطى حسب ثلاثة أنواع من السلع بالشعاع :

$$X = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \end{bmatrix}$$

و كانت الأسعار المقابلة لكل سلعة ممثلة في الشعاع :

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

فان حاصل الضرب XP هو عبارة عن قيمة المبيعات لهذه الشركة خلال السنة t من السلع الثلاثة .

$$X.P = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 .1 + 26 .2 + 8.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 \end{bmatrix} = 134$$

نلاحظ أن الجذاء PX أيضا معرفا و هو عبارة عن مصفوفة من الدرجة 3 × 3 غير أن عناصر المصفوفة الجديدة هي بدون معنى من الناحية الاقتصادية .

ب ـ ضرب شعاع في مصفوفة :

اذا كانت لدينا البيانات التالية حول مبيعات احدى الشركات لثلاثة أنواع من السلع (بالكميات) في ثلاثة نقاط للبيع خلال سنة معينة :

أنواع السلع	نقاط البيع		
	A	B	C
I	58	26	8
II	52	58	12
III	1	3	9

أما الأسعار المقابلة لكل نوع من أنواع السلع الثلاثة فهي معطاة بالشعاع :

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ان الجذاء A'P هو عبارة عن مصفوفة جديدة من الدرجة 3x1، عناصرها تعبر عن قيمة المبيعات السنوية من السلع الثلاثة في احدى نقاط البيع.

$$A'P = \begin{bmatrix} 58 & 52 & 1 \\ 26 & 58 & 3 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.1 + 52.2 + 1.3 \\ 26.1 + 58.2 + 3.3 \\ 8.1 + 12.2 + 9.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 151 \\ 59 \end{bmatrix}$$

ان العنصر165 = a_{11} هو عبارة عن قيمة المبيعات السنوية من السلع الثلاثة في نقطة البيع A ، و العنصر 151 = a_{21} عبارة عن قيمة المبيعات السنوية من السلع الثلاثة في نقطة البيع B ، و 59 = a_{31} هو قيمة المبيعات السنوية من السلع الثلاثة في نقطة البيع C . نفس هذه النتائج يمكن الحصول عليها عن طريق الجذاء P'A .

$$P'A \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 & 151 & 59 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن الجذاء PA غير معرف، بينما الجذاء AP معرف غير أن عناصر هذا الجذاء ليس لها تفسير اقتصادي.

جـ - ضرب مصفوفة في مصفوفة :

اذا كانت لدينا المنتجات النصاعية E_2 ، E_1 ، B_2 ، B_1 ، T_3 ، T_2 ، T_1 ، ترتبط تكنولوجيا وفقا لما يلي : من أجل انتاج القطع E_2 ، E_1 يجب استخدام القطع B_2 ، B_1 و لانتاج القطع B_2 ، B_1 بدورها يجب استخدام قطع أخرى T_3 ، T_2 ، T_1 و الكميات اللازمة ممثلة في الجدولان 1 و 2.

الجدول ـ 1

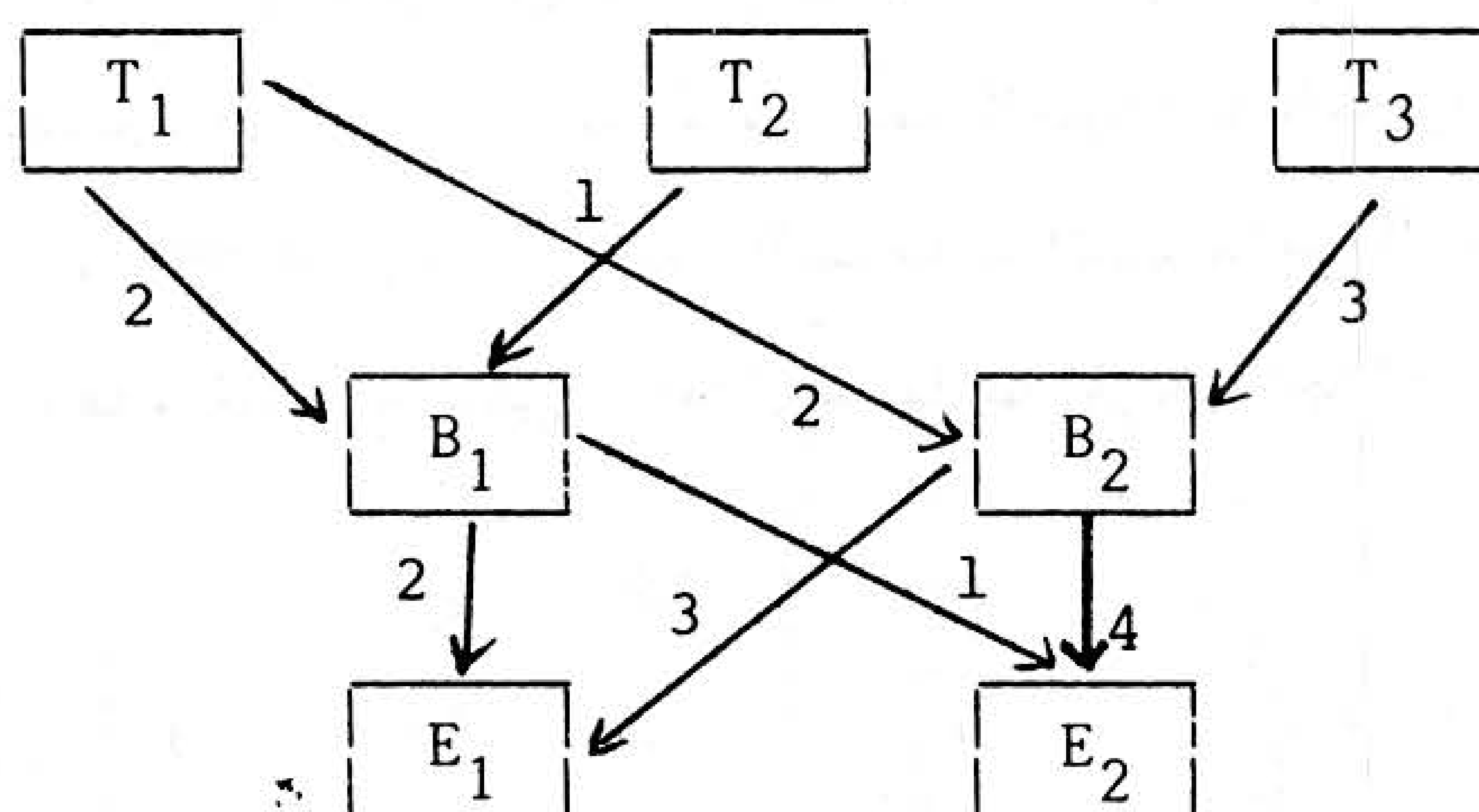
المنتوج	المدخلات	
	B_1	B_2
E_1	2	3
E_2	1	4

الجدول ـ 2

المنتوج	المدخلات		
	T_1	T_2	T_3
B_1	2	1	0
B_2	1	0	3

و المطلوب الآن هو تحديد عدد القطع اللازمة من T_3 ، T_2 ، T_1 لانتاج قطعة واحدة من E_1 و E_2 .

لغرض توضيح معطيات هذا المثال يمكننا الاستعانة بالرسم التالي :



الحل بدون اللجوء الى المصفوفات :

1ـ من الجدول الأول يمكننا أن نكتب :

$$E_1 = 2B_1 + 3B_2$$
$$E_2 = 1B_1 + 4B_2$$

2ـ من الجدول الثاني يمكننا أن نكتب :

$$B_1 = 2T_1 + 1T_2 + 0T_3$$
$$B_2 = 1T_1 + 0T_2 + 3T_3$$

و منه :

$$E_1 = 2\ (\ 2T_1 + 1T_2 + 0T_3) + 3\ (\ 1T_1 + 0T_2 + 3T_3)$$
$$E_2 = 1\ (\ 2T_1 + 1T_2 + 0T_3) + 4\ (\ 1T_1 + 0T_2 + 3T_3)$$

و أخيرا نحصل على :

$$E_1 = 7T_1 + 2T_2 + 9T_3$$
$$E_2 = 6T_1 + 1T_2 + 12T_3$$

هكذا يعني أنه لكي يتم انتاج وحدة واحدة من E_1 يجب استخدام 7 قطع من T_1 و 2 قطع من T_2 و 9 قطع من T_3.

و لانتاج وحدة واحدة من E_2 يجب استخدام 6 قطع من T_1 و قطعة واحدة من T_2 و 12 قطعة من T_3.

نستخدم الآن المصفوفات :

من الجدول الأول يمكننا أن نكتب :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

من الجدول الثاني يمكننا أن نكتب :

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

و منه :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7T_1 + 2T_2 + 9T_3 \\ 6T_1 + 1T_2 + 12T_3 \end{bmatrix}$$

و بالتالي :

$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 7T_1 + 2T_2 + 9T_3 \\ 6T_1 + 1T_2 + 12T_3 \end{matrix}$$

2-7- خصائص الضرب في المصفوفات :

1- الضرب تجميعي في المصفوفات : $(AB)\,C = A\,(BC)$

البرهان :

لتكن لدينا المصفوفات : $C = \left[c_{kj}\right]_{p.q}$ $B = \left[b_{sk}\right]_{n.p}$ $A = \left[a_{is}\right]_{m.n}$

بفرض أن $AB = F$ فان : $f_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} B_{2k} \dots + a_{in} b_{nk}$

$$(AB)\ C = \left[f_{ik}\right]_{m.p} \left[C_{kj}\right]_{p.q} = \left[\sum_{k=1}^{p} f_{ik} C_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk}\right) C_{kj}\right]$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{sk} c_{kj}\right)\right]$$

و بما أن : $\left[\sum_{k=1}^{p} b_{sk} c_{kj}\right] = BC$

اذا : $\left[\sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{sk} c_{kj}\right)\right] = A\ (BC)$

و أخيرا نكتب أن : $(AB)\ C = A\ (BC)$

و بنفس الطريقة يمكن البرهان على صحة هذه الخاصية في حالة أكثر من ثلاثة مصفوفـــات

مثلا : $(A\ B\ C)\ D = A\ (B\ C\ D)$

$(A\ B\ C\ D)\ H = A\ (B\ C\ D\ H)$

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

تأكد أن : $(A\ BC)\ D = A\ (B\ CD)$

نقوم أولا بحساب الجذاء $A\ B\ C$:

$$A\ BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3x4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{4x2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} 19 & 13 & 32 \\ 17 & 7 & 20 \\ 26 & 13 & 39 \end{bmatrix}_{3x3}$$

و الآن نحسب (A B C) D :

$$(A\ B\ C)\ D = \begin{bmatrix} 19 & 13 & 32 \\ 17 & 7 & 20 \\ 26 & 13 & 39 \end{bmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 115 & 90 \\ 73 & 54 \\ 143 & 104 \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بحساب الطرف الثاني (A (B C D :

نقوم أولا بحساب الجذاء (B C D)

$$(B\ C\ D) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{4\times2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 20 \\ 7 & 6 \\ 22 & 16 \end{bmatrix}$$

و نحسب الآن :

$$A\ (B\ C\ D) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 20 \\ 7 & 6 \\ 22 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115 & 90 \\ 73 & 54 \\ 143 & 104 \end{bmatrix}$$

و أخيرا نجد أن :

$$A\ (B\ C\ D) = \begin{bmatrix} 115 & 90 \\ 73 & 54 \\ 143 & 104 \end{bmatrix} = (A\ B\ C)\ D$$

2ـ الضرب توزيعي في المصفوفات :

أي اذا كانت A مصفوفة متوافقة للضرب مع المصفوفتين C و B فان :

$$A\ (B + C) = AB + AC$$

البرهان : اذا كانت لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} a_{ik} \end{bmatrix}_{m.n} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{kj} \end{bmatrix}_{n.p} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{kj} \end{bmatrix}_{n.p}$$

$$A(B+C) = [a_{ik}][b_{kj} + c_{kj}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj})\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}\right] = AB + AC$$

و يمكن تعميم هذه الخاصية في حالة أكثر من ثلاثة مصفوفات.

مثال : اذا كانت لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لنتحقق من أن : $A(B+C) = AB + AC$

نحسب أولا $B + C$:

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ثم $A(B + C)$:

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

الآن نحسب AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ثم AC :

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

و أخيرا :

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

و بالتالي :

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = AB + AC$$

3ـ اذا كانت A مصفوفة من الدرجة m.n و كانت I مصفوفة أحادية متوافقة معها بالنسبة للضرب فان : $A\,I_n = I_m\,A = A$

أي أن المصفوفة الأحادية I تقوم مقام العدد 1 في الجبر العادي.

مثال : اذا كانت : $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

فان : $A_{2x3}\,I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

كما أن : $I_2\,A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

4ـ اذا كانت A مصفوفة من الدرجة mxn و كانت $O_{n\,x\,p}$ مصفوفة صفرية متوافقة مع A بالنسبة للضرب فان :

$A_{m.n} \cdot O_{n.p} = O_{m.p}$

أي أن المصفوفة الصفرية تقوم مقام العدد صفر في الجبر العادي.

مثال : اذا كانت : $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

فان : $A_{3x2}\,O_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$

و كذلك اذا كانت A مصفوفة من الدرجة mxn و كانت O مصفوفة صفرية من الدرجة pxm

فان : $O_{p.m} \cdot A_{m.n} = O_{p.n}$

مثال : اذا كانت : $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$

فان :
$$O_{3x3}\,A_{3x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$$

2ـ8ـ ملاحظات هامة حول عملية الضرب في المصفوفات :

1ـ عملية الضرب في المصفوفات ليست تبديلية بصفة عامة أي :

$$AB \neq BA$$

و يمكن التحقق من ذلك من خلال المثال التالي :

اذا كانت لدينا :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

فان :
$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$
بينما :
$$BA = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

هناك حالات تتحقق فيها المساواة : $AB = BA$

مثلا : اذا كانت لدينا :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فان :
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
و كذلك
$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

في هذه الحالة يقال أن المصفوفتان تبادليتان. و نجد أن المساواة $BA = AB$ دوما محققة بالنسبة للمصفوفات القطرية.

فاذا كانت لدينا :
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

فان :
$$AB = BA = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix}$$

و تجدر الاشارة أن الجذاءان AB و BA لهما وجود في آن واحد فقط في حالة كون

المصفوفتان A و B مربعتان و من نفس الدرجة .

2ـ اذا كان الجذاء AB = O فانه لا يعني بالضرورة أن A = O أو B = O

فمثلا : اذا كانت :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

فان الجذاء : $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ في حين أن $A \neq O$ و $B \neq O$

3ـ اذا كان AB = AC فهذا لا يعني بالضرورة أن : B = C

فمثلا : اذا كانت :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

و كذلك :

$$AC = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

في حين أن $B \neq C$.

2ـ9ـ قوى مصفوفة :

من شرط توافق مصفوفتين للضرب نجد أن المصفوفة تكون متوافقة مع نفسها بالنسبة للضرب اذا وفقط اذا كانت هذه المصفوفة مربعة .

يسمى الجذاء A . A بمربع المصفوفة و يكتب A^2 .

- $A^2 = A \cdot A$
- $A^3 = A^2 \cdot A$
- $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
- $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$

2ـ10ـ حالات خاصة لقوى المصفوفة :

1ـ اذا رفعت مصفوفة الى قوة ما و لتكن A^n حيث n عدد صحيح وكانت $A^n = O$ نقول أن المصفوفة عديمة القوى من المرتبة n .

فمثلا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

نجد أن :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نقول في هذه الحالة أن المصفوفة A عديمة القوى من المرتبة 2 .

أما بالنسبة للمصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

فهي مصفوفة عديمة القوى من المرتبة 3 .

لأن :

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

بينما :

$$B^3 = B^2 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2ـ اذا رفعت المصفوفة A الى قوى 2 و بقيت المصفوفة A على حالها و لم تتغير أي أن : $A^2 = A$ و بالتالي فان : $A^3 = A$ و كذلك : $A^n = A$ نقول عن هذه المصفوفة أنها مصفوفة عقيمة .

فمثلا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

نجد أن : $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

اذا المصفوفة A عقيمة .

تمارين :

1ـ اذا كانت لديك المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات الآتية اذا أمكن :

$A + B$, $B + A$, $C + A$, $B + C$

ماذا تستنتج ؟

2ـ اذا كانت لديك المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

أ ـ أحسب المصفوفات التالية :

$A + B + C$, $A + (B + C)$, $(A + B) + C$

ماذا تلاحظ ؟

ب ـ أحسب المصفوفات التالية : $A - B$; $B - C$; $A + B - C$

3ـ اذا كانت لدينا بيانات حول مبيعات احدى الشركات التجارية خلال الفصول الأربعة من السنة في ثلاثة نقاط للبيع.

حيث تمثل كل مصفوفة من المصفوفات التالية حجم المبيعات لـ 3 أنواع من السلع (الأعمدة) خلال كل فصل من فصول السنة الأربعة (الأسطر).

نقطة البيع رقم 1
$$\begin{bmatrix} 17 & 4 & 12 \\ 6 & 4 & 13 \\ 11 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

نقطة البيع رقم 2
$$\begin{bmatrix} 20 & 5 & 10 \\ 10 & 5 & 15 \\ 20 & 5 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

نقطة البيع رقم 3

$$\begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

المطلوب 1ـ بين في مصفوفة جديدة اجمالي مبيعات الشركة في نقاط البيع الثلاثة وفقـــا لانواع السلع و فصول السنة .

2ـ أعد تشكيل المصفوفات الثلاثة المعطاة في ثلاثة مصفوفات أخرى لتدل كـــل مصفوفة على حصيلة مبيعات الشركة لكل نوع من أنواع السلع الثلاثة خـــلال الفصول الأربعة .

3ـ أعد تشكيل المصفوفات الثلاثة المعطاة في أربعة مصفوفات أخرى لتدل كـــل مصفوفة على حصيلة مبيعات الشركة من السلع الثلاثة وفقا لكل فصل من فصـــول السنة الأربعة .

4ـ لنفترض أنه لدينا مصفوفتان :

المصفوفة الأولى

$$\begin{bmatrix} 450 & 780 & 210 \\ 1050 & 240 & 90 \\ 1500 & 120 & 590 \end{bmatrix}$$

عناصرها عبارة عن حجم منتجات كل دولة (حسب الأسطر) من الدول الثلاثة لثلاثة أنـــواع من الخامات (حسب الأعمدة). المعطيات خاصة بالسنة 1980.

و مصفوفة أخرى :

المصفوفة الثانية

$$\begin{bmatrix} 520 & 910 & 220 \\ 1080 & 580 & 290 \\ 1460 & 830 & 600 \end{bmatrix}$$

أيضا عناصرها عبارة عن حجم المنتجات لكل دولة من الدول الثلاثة لثلاثة أنواع من الخامات. المعطيات خاصة بالسنة 1985.

المطلوب : حساب مصفوفة الزيادة المطلقة للانتاج بين الفترتين 1980 ـ 1985 مع التعليق الاقتصادي على عناصر المصفوفة الجديدة a_{13} ، a_{31} ، a_{33} .

5ـ لنفترض أن لاحدى الشركات 4 نقاط للبيع في سنة 1987 و تقوم بتسويق 3 أنواع من المنتجات و كانت حجم المبيعات من المنتجات الثلاثة وفقا لكل نقطة بيع مبينة في المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 & 50 \\ 30 & 15 & 10 & 75 \\ 13 & 19 & 5 & 30 \end{bmatrix}$$

في سنة 1988 أصبح للشركة 6 نقاط بيع و أصبحت تسوق 4 أنواع من المنتجات كما هو مبين في المصفوفة التالية :

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 32 & 18 & 40 & 10 & 5 \\ 25 & 18 & 12 & 50 & 10 & 12 \\ 14 & 15 & 10 & 14 & 15 & 30 \\ 15 & 20 & 2 & 26 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

المطلوب : 1ـ حساب اجمالي مبيعات الشركة خلال السنتين 1987 و 1988 وفقا لكل نقطة بيع ولكل نوع من أنواع المنتجات (في شكل مصفوفة).

2ـ حساب الزيادة المطلقة التي حصلت في حجم المبيعات خلال السنتان 1987 و 1988 وفقا لكل نقطة بيع و لكل نوع من أنواع المنتجات (في شكل مصفوفة).

مع التعليق الاقتصادي على عناصر المصفوفة الجديدة a_{34} ، a_{26} .

6ـ اذا كانت لديك المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

أحسب الجداءات التالية :

- AB
- BA
- AC
- CA
- BC
- CB

7ـ اذا كانت لدينا المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1ـ أحسب الجداءات : AB ، BA ماذا تستنتج ؟

2ـ أحسب المصفوفة : $2A - 3B + 3/2\ C$

3ـ تأكد من أن : $(AB)C = A(BC)$

4ـ تأكد أن : $A(B + C) = AB + AC$

5ـ تأكد من صحة المتطابقة : $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

8ـ اذا كانت لديك المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

أحسب المصفوفات التالية ـ A^2 ماذا تلاحظ ؟

ـ B^2 ماذا تلاحظ ؟

9ـ اذا كانت لديك المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & X \\ X-1 & X \end{bmatrix}$$

أحسب المصفوفات : ـ A^2 ماذا تستنتج ؟

ـ B^2

ـ AB

ـ BA

10ـ اذا علمت أنه من أجل انتاج المنتجات E_1 و E_2 يجب استخدام المستلزمــــــات

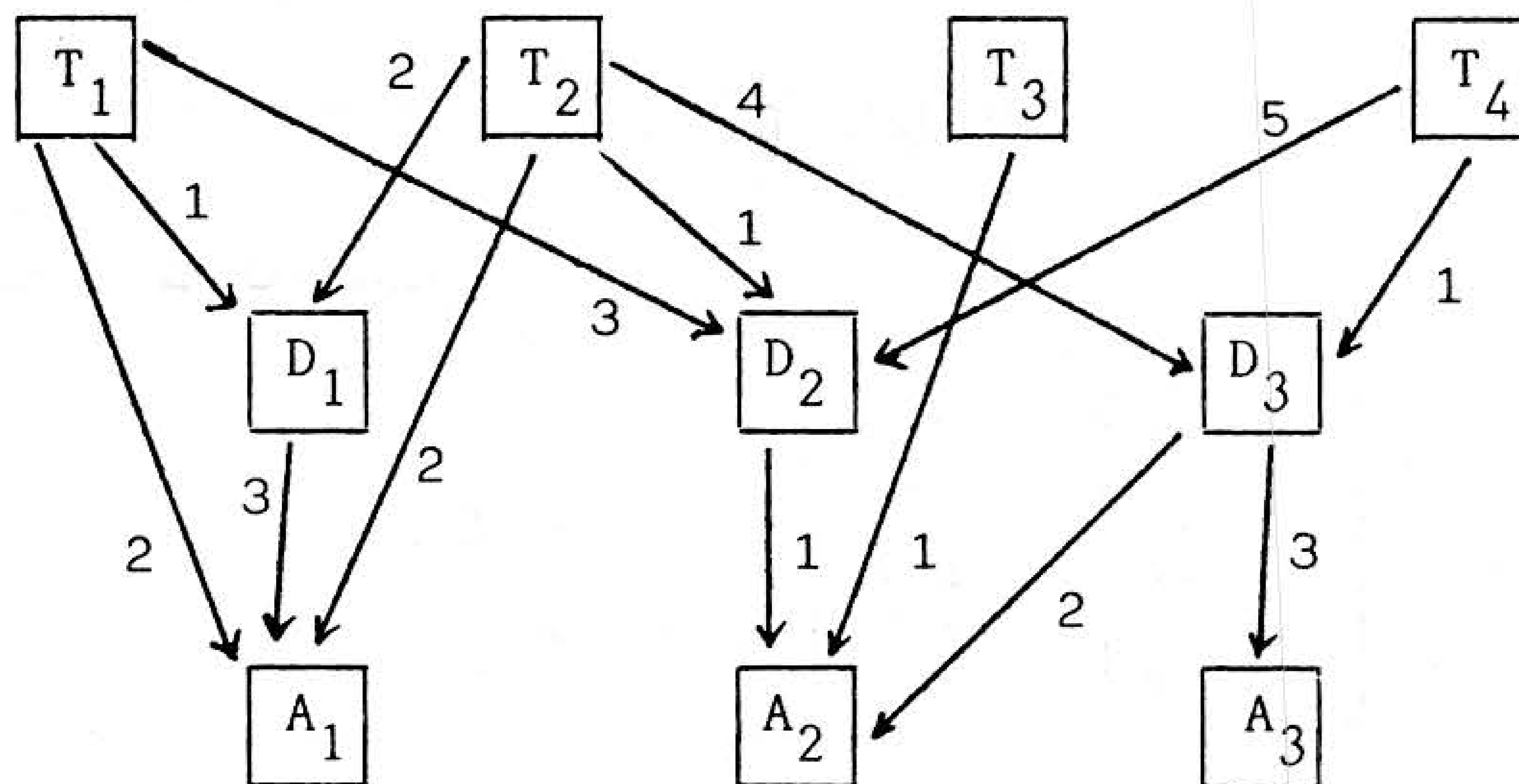
(من المرتبة الأولى) B_1 و B_2 و من أجل انتاج هذه المستلزمات بدورها يجب استخدام 3 مستلزمات أخرى (من المرتبة الثانية) T_1 ، T_2 ، T_3 . الكميات اللازمة موضحة في الجدولان التاليان :

المنتجات	مستلزمات من الدرجة الأولى B_1	B_2
E_1	4	6
E_2	2	8

مستلزمات من المرتبة الأولى	مستلزمات من المرتبة الثانية T_1	T_2	T_3
B_1	4	2	0
B_2	2	0	0

و المطلوب تحديد كمية المستلزمات من المرتبة الثانية T_1 ، T_2 ، T_3 اللازمة لانتاج وحدة واحدة من كل من المنتوجين : E_1 و E_2 .

11ـ اذا كان الرسم التالي يمثل العلاقة التكنولوجية بين ثلاثة أنواع من المنتجات في شكلها النهائي A_1 ، A_2 ، A_3 من جهة و مستلزمات الانتاج من المرتبة الأولى D_1، D_2، D_3 من جهة ثانية و مستلزمات الانتاج من المرتبة الثانية T_1 ، T_2 ، T_3 ، T_4 .



1ـ أكتب مصفوفة العلاقات المقابلة لهذا الشكل البياني.

2ـ حدد عدد المستلزمات من المرتبة الثانية (T_1 ، T_2 ، T_3 ، T_4) الأزمة لانتاج قطعة واحدة من كل من المنتجات النهائية A_1 ، A_2 ، A_3 .

12ـ اذا كانت الكميات المباعة من 3 أنواع من السلع في ثلاثة أسواق معطاة في المصفوفة

التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

حيث تمثل السطور أسواق البيع و الأعمدة أنواع السلع و كانت الأسعار المقابلة لكل سلعة معطاة في الشعاع التالي :

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

المطلوب : 1ـ تحديد قيمة المبيعات من كل سلعة عبر الأسواق الثلاثة .

2ـ اجمالي المبيعات من السلع الثلاثة في الأسواق الثلاثة .

13ـ اذا كانت لديك المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

أحسب الجداءات : ـ B^2

ـ B^3

ـ A^2 ماذا تستنتج ؟

14ـ اذا كانت لديك المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix}$$

أحسب الجداءات التالية : AB ، BA ، A^2 ، B^2 ، $2A - 3B^2$

الفصل الثالث : المحددات :

3-1- مفهوم المحدد :

ان محدد المصفوفة : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$ هو عبارة عن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

اذا فالمحدد يعرف على أنه مجموعة من الأرقام مرتبة في شكل صفوف و أعمدة على شكل مربع يحده خطين رأسيين تكون عدد السطور فيه مساوية لعدد الأعمدة .

المحدد يكون معرفا فقط بالنسبة للمصفوفات المربعة .

بخلاف المصفوفة فان للمحدد قيمة معينة يتم الحصول عليها بعد عملية فك المحدد أو حساب قيمته . و قبل الشروع في شرح كيفية حساب قيمة المحددات نتعرف أولا على مفهومين أساسين في عملية الفك.

1- المحدد الصغير M_{ij} .

ان المحدد الصغير للعنصر a_{ij} هو المحدد الصغير الذي سنرمز له بـ M_{ij} و الذي سنحصل عليه من المحدد الكبير $|A|$ و ذلك بعد حذف عناصر السطر i و عناصر العمود j .

فاذا كانت المصفوفة المربعة A من الدرجة n محددها $|A|$ و حذف منها السطر i و العمود j فاننا سنحصل على المحدد الصغير للعنصر a_{ij} و يكون من الدرجة $n - 1$ و يرمز له M_{ij} .

مثال : اذا كان لدينا المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فان المحدد الصغير للعنصر a_{11} هو :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و المحدد الصغير للعنصر a_{12} هو :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و هكذا بالنسبة لبقية المحددات الصغيرة للعناصر الأخرى.

2ـ المحدد المرافق : C_{ij}

ان المحدد المرافق للعنصر a_{ij} هو عبارة عن M_{ij} $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

فاذا كان لدينا المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فان المحددات المرافقة للعناصر a_{11} و a_{12} هي :

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مثال : اذا كان لدينا المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

فان المحددات الصغيرة للعناصر a_{11} ، a_{12} ، a_{13} هي :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} , \; M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} , \; M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

و المحددات المرافقة للعناصر a_{11} ، a_{12} ، a_{13} هي :

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} , \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} , \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ملاحظة : ان المقدار $(-1)^{i+j}$ يفيد فقط في تحديد الاشارة فهو اما أن يكون +1 اذا كان i+j زوجيا أو ـ1 اذا كان i+j فرديا.

3ـ2ـ حساب قيمة المحددات :

يمكننا أن نصادف أيضا مصطلح فك المحددات أو نشر المحددات و كلها تحمل معنى واحدا هو حساب قيمة المحددات.

1ـ المحددات من الدرجة الثانية :

اذا كان المحدد من الدرجة 2 أي يحتوي على سطرين و عمودين فان قيمته تتحدد بجداء عنصري القطر الرئيسي مطروحا منه جداء العنصرين غير القطريين.

فاذا كان لدينا المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فان حسابه يتم وفقا لما يلي :

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ فان :

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.3 - 2.1 = 19$$

و تجدر الاشارة أن كلمة محدد يمكن أن تعني الكتابة $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ كما يمكن أن تعني قيمته أي 19.

ملاحظة : اذا كانت المصفوفة تحتوي على عنصر واحد فان قيمة محدد هذه المصفوفة هو العنصر نفسه.

مثلا اذا كانت :

$$A = [3]$$

فان : $| A | = 3$

2ـ المحددات من الدرجة الثالثة :

ابتداء من المحددات من الدرجة الثالثة نبدأ باللجوء الى استخدام المحددات المرافقة C_{ij} .

فك المحددات من الدرجة الثالثة يمكن أن يتم وفقا لأي عمود أو لأي سطر.

فاذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فان عملية الفك يمكن أن تتم :

أ ـ وفقا للسطر الأول و بالتالي : $|A| = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$

$$|A| = a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ب ـ وفقا للسطر الثاني و بالتالي : $|A| = a_{21} C_{21} + a_{22} C_{22} + a_{23} C_{23}$

$$|A| = a_{21} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

جـ وفقا للسطر الثالث و بالتالي : $|A| = a_{31} C_{31} + a_{32} C_{32} + a_{33} C_{33}$

$$|A| = a_{31} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

يمكن اتبعاع نفس الطريقة للفك وفقا لأي عمود.

1ـ وفقا للعمود الأول و بالتالي : $|A| = a_{11} C_{11} + a_{21} C_{21} + a_{31} C_{31}$

2ـ وفقا للعمود الثاني و بالتالي : $|A| = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$

3ـ وفقا للعمود الثالث و بالتالي : $|A| = a_{13} C_{13} + a_{23} C_{23} + a_{33} C_{33}$

مثال : اذا كان لدينا المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

و اخترنا نشر هذا المحدد وفقا للسطر الأول فان :

$$|A| = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$$

$$= 1 \ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4 \ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \ (-1-6) - 4 \ (1-4) - 3 \ (-3 -2) = 20$$

أما اذا اخترنا النشر وفقا للعمود الثالث فان :

$$|A| = a_{13} C_{13} + a_{23} C_{23} + a_{33} C_{33}$$

$$= -3 \ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+3} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 15 + 10 - 5 = 20$$

ملاحظة : ان حرية اختيار أي سطر و أي عمود عند حساب قيمة المحدد تسمح لنا باختيار السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار (اذا وجد) و ذلك لاختصار العمليات الحسابية .

فمثلا بالنسبة للمحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

فانه ينبغي اختيار النشر وفقا للسطر الثاني .

$$|A| = 0 + 0 + 3 \ (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

و تجدر الاشارة الى أن هناك طريقة أخرى لحساب المحددات من الدرجة 3، تتمثل في امكانية زيادة العمودين الأول و الثاني ليصبحا العمودين الرابع و الخامس على التوالي ثم اجراء عملية الحساب وفقا لمايلي :

لدينـا :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \Big[(1.1.-1) + (4.2.2) +$$

$$(-3.-1.3)\Big] - \Big[(-3.1.2) + (1.2.3) + (4.-1.-1)\Big]$$

$$= 20$$

3ـ المحددات من الدرجة n .

ان حساب قيمة المحددات بالنشر وفقا لاحد الأسطر أو أحد الأعمدة هي طريقة صحيحة لحساب جميع المحددات مهما كانت درجتها.

ففي الحالة العامة، أي عندما يكون المحدد من الدرجة n فانه يمكننا أن نكتب :

ـ النشر وفقا لعناصر السطر i :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; (-1)^{i+j} \; |M_{ij}|$$

ـ النشر وفقا لعناصر العمود j :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \; (-1)^{i+j} \; |M_{ij}|$$

و يلاحظ في هذه الطريقة أنها تنطوي على عمليات حسابية طويلة خاصة عندما نكون أمام محددات من درجة عالية . و لنرى مثلا كيفية حساب قيمة محدد من الدرجة 4 وفقا لهذه الطريقة :

فاذا كان لدينا :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

و لنجري عملية النشر وفقا للعمود الأول مثلا :

$$|A| = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 5- & 3 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ 1(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

لقد حصلنا على أربعة محددات من الدرجة 3. سنقوم بفك هذه المحددات بدورها الى محددات من الدرجة 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

و نفك المحدد الثاني وفقا للعمود الأول :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

و نفك المحدد الثالث وفقا للعمود الأول :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

و نفك المحدد الرابع وفقا للعمود الأول :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

و الآن يجب حساب قيمة كل هذه المحددات الصغيرة من الدرجة 2 و عددها 12 محددا.

مع العلم أنه في الحياة العملية يمكننا أن نصادف محددات من الدرجة 20 و أكثـــــر.
لحسن الحظ هناك طرق أخرى لحساب قيمة المحددات، هذه الطرق تعتمد على خصائـــص
المحددات التي سنتعرف عليها الآن.

3_3 خصائص المحددات :

1_ محدد منقول المصفوفة يساوي الى محدد المصفوفة الأصلية أي : $|A| = |A'|$

فمثلا اذا كان :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

فان :

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

هذا يعني أنه اذا تحولت الأسطر الى أعمدة و الأعمدة الى أسطر في مصفوفة فان قيمة المحدد لا تتغير.

2_ تتغير اشارة المحدد اذا بدلنا فيه مواقع سطرين أو عمودين.

فمثلا : اذا كان :

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

فان :

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -17$$

3_ اذا كانت جميع عناصر السطر أو العمود مشتملة على حدين فان المحدد يمكن كتابتـــــه
على شكل محددين.

أي اذا كان لدينا :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + k \\ a_{21} & a_{22} + s \end{vmatrix}$$

فانه يمكننا أن نكتب :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & k \\ a_{21} & s \end{vmatrix}$$

مثال :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1+1 \\ -1 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

4- محدد المصفوفة المثلثية الى أعلى أو الى أسفل يساوي الى جذاء عناصر القطر الرئيسي للمحدد :

أي اذا كان لدينا :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

فأن :

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \ldots a_{nn}$$

كذلك اذا كان لدينا :

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & b_{nn} \end{vmatrix}$$

فان :

$$|B| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \ldots b_{nn}$$

مثال : اذا كان لدينا المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

فان :

$$|A| = 2 \cdot 4 \cdot -1 = -8$$

5ـ تنعدم قيمة المحدد اذا تساوى أو تناسب فيه عناصر سطرين أو عمودين.

مثال ـ1ـ حالة تساوي سطرين : (السطر الأول يساوي السطر الثالث).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال ـ2ـ حالة تناسب سطرين : (السطر الثاني هو ضعف السطر الأول).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

6ـ اذا ضربت جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة في عدد ما $k \neq 0$ فان قيمة المحـــدد تضرب بذلك العدد.

مثال : اذا كان لدينا :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

و ضربت جميع عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة و ليكن العمود الأول في العدد 3.

فان قيمة المحدد تضرب بذلك العدد.

$$\begin{vmatrix} 3.1 & 4 & -3 \\ 3.-1 & 1 & 2 \\ 3.2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3.20 = 60$$

من هذه الخاصية للمحددات يمكننا تسجيل نتيجتين :

نتيجة ـ1ـ اذا كانت جميع عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة عبارة عن أصفار فان قيمة المحــــــدد أيضا تساوي صفر.

مثلا :

$$|A| = \quad = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

نتيجة 2ـ اذا ضربت جميع عناصر محدد من الدرجة n بعدد ما $k \neq 0$ فان قيمة المحــــدد تضرب بذلك العدد مرفوعا الى قوة n أي k^n.

فمثلا بالنسبة للمحدد :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

فلو ضربنا جميع عناصره في 3 ينتج أن قيمة المحدد هي :

$$\begin{vmatrix} 3.\ 1 & 3.4 & 3\ .\ -3 \\ 3.\ -1 & 3.1 & 3\ .\ 2 \\ 3.\ 2 & 3.3 & 3\ .\ -1 \end{vmatrix} = 3^3.20 = 27.20 = 540$$

7ـ لا تتغير قيمة المحدد اذا أضفنا الى عناصر أحد أسطره أو أعمدته كميات متناسبة مـــع عناصر سطر آخر أو عمود آخر.

فاذا كان لدينا :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

و أضفنا الى السطر الثاني ضعف السطر الأول أي :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1+2 & 1+8 & 2-6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 9 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

نظرا لأهمية هذه الخاصية في حساب قيمة المحددات من الدرجة n كما سنرى فيما بعــــد فاننا سنقوم بالبرهان عليها :

اذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

محددها هو :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

و أضفنا الى عناصر السطر الأول مضاعفات من λ عناصر السطر الثاني لنحصل على مصفوفة جديدة :

$$B = \begin{bmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

محددها هو :

$$|B| = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

طبقا للخاصية رقم -3 فانه يمكن كتابة هذا المحدد كالتالي :

$$|B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

نلاحظ بأن المحدد الأخير المضروب في λ يساوي صفر لأن فيه سطريان متساويان (طبقا للخاصية رقم -5) و بالتالي نستنتج أن : $|A| = |B|$.

ان هذه الخاصية هامة جدا يمكن استخدامها في حساب قيمة المحددات و يتم ذلك عن طريق اضافة مضاعفات عناصر الأسطر الى عناصر الأسطر الأخرى (أو مضاعفات عناصر الأعمدة الى عناصر الأعمدة الأخرى) بطريقة تسمح لنا في الأخير الابقاء فقط على محدد من الدرجة 2 أي نحول شكل المحدد من الدرجة n الى :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{n-2,n-2} \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال ـ1 اذا كان لدينا المحدد :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 17 & 21 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

بضرب السطر الأول في (8ـ) و جمعه الى السطر الثاني نحصل على :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

بضرب السطر الأول في (2ـ) و جمعه الى السطر الثالث نحصل على :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 21 - 5 = 16$$

مثال ـ2 : اذا كان لدينا :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

نقوم بجمع السطر الأول الى السطر الثاني ثم الى السطر الثالث و السطر الرابع لنحصل على:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

نجمع السطر الثالث الى السطر الثاني (لكي نحول العنصر a_{22} الى عدد لا يساوي صفر)

لنحصل على :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الثاني في (1-) و نجمع الى السطر الثالث و السطر الرابع لنحصل على :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2\ (8-0) = -16$$

وفقا للخاصية رقم 4- (محدد المصفوفة المثلثية الى أعلى أو الى أسفل يساوي الى جــــذاء عناصر قطرها الرئيسي) فانه يمكننا تحويل شكل المحدد باستخدام الخاصية رقم 7- الى الشكل التالي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_1,\ n-1 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{13} & \cdots & a_2,\ n-1 & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_3,\ n-1 & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

و الذي قيمته تساوي :

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots \cdot a_{n-1,\ n-1} \cdot a_{nn}$$

مثال : اذا كان لدينا المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 17 & 21 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

نضرب السطر الأول في (8-) و نجمعه الى السطر الثاني، ثم نضرب السطر الأول في (2-)

و نجمعه الى السطر الثالث نحصل على :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

نقسم السطر الثاني على (7) و نجمع الى السطر الثالث لنحصل على :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{7} \end{vmatrix} = 1 \cdot -7 \cdot -\frac{16}{7} = 16$$

ملاحظة ـ1 : من أجل تحويل شكل المحدد الى محدد لمصفوفة مثلثية الى أعلى ـ كما فعلنا في المثال السابق ـ أي الى محدد حيث :

$i = j$ عندما $a_{ij} \neq 0$

$i > j$ عندما $a_{ij} = 0$

فانه ينبغي اتباع الخطوات التالية (في حالة استخدام الأسطر) :

1ـ نحول العنصر a_{11} الى عنصر لا يساوي الصفر، $a_{11} \neq 0$.

2ـ نحول بقية عناصر العمود الأول الى أصفار أي :

$$a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0$$

3ـ نحول العنصر a_{22} الى عنصر لا يساوي صفر، $a_{22} \neq 0$.

4ـ نحول بقية عناصر العمود الثاني و الواقعة أسفل العنصر a_{22} الى أصفار أي :

$$a_{32} = a_{42} = \dots = a_{n2} = 0$$

5ـ نحول العنصر a_{33} الى عنصر لا يساوي صفر، $a_{33} \neq 0$.

6ـ نحول بقية عناصر العمود الثالث و الواقعة أسفل العنصر a_{33} الى أصفار أي :

$$a_{43} = a_{53} = \dots = a_{n3} = 0$$

و هكذا الى أن نحول العنصر a_{nn} الى عنصر لا يساوي صفر، $a_{nn} \neq 0$

ملاحظة ـ2 : أثناء قيامنا بجمع مضاعفات سطر الى سطر آخر (أو مضاعفات عمود الى عمـــود آخر) يمكن أن نحصل على سطر (أو عمود) تكون جميع عناصره عبارة عن أصفار، كما يمكن مصادفة سطرين (أو عمودين) متساويين، نستنتج أن قيمة هذا المحدد معدومة ـ تساوي صفر، و ذلك طبقا للخاصية رقم ـ5.

3ـ4ـ جمع و طرح المحددات :

على خلاف جمع و طرح المصفوفات فان جمع و طرح محددين له وجود حتى لو لم يكن المحددان من نفس الدرجة ، لأن المحدد عبارة عن قيمة عددية .

مثال : اذا كان لدينا المحددان :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

فان : $|A| + |B| = 20 + (-16) = 4$

$|A| - |B| = 20 - (-16) = 36$

ان التعبير عن مجموع محددين بالكتابة $|A+B|$ (كذلك $|A-B|$) لا يجوز لأنه لا يمكـن كتابة هذا المجموع داخل محدد واحد ـ في شكل لوحة للأرقام ـ كما هو الشأن بالنسبة للمصفوفات، فالجمع أو الطرح يتم فقط بالنسبة لقيمة هذين المحددين أي نكتب :

$|A| - |B| \ , \ |A| + |B|$

3ـ5ـ ضرب المحددات :

ضرب المحددات له وجود حتى لو لم تكن هذه المحددات من نفس الدرجة ، و ضرب المحددات لا يتم سوى لقيمة هذه المحددات.

يلاحظ أن ضرب المحددات تبديلي : $|A| \,.\, |B| = |B| \,.\, |A|$

ففي حالة ما اذا كانت A و B مصفوفتان مربعتان و من نفس الدرجة فانه يمكننا أن نكتـــب:

$$|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |AB| = |BA|$$

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

و بالتالي :

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & 36 \\ 44 & 94 \end{bmatrix} , \quad BA = \begin{bmatrix} 8 & 30 \\ 27 & 103 \end{bmatrix}$$

فاننا نجد :

$$|A| = 2, \quad |B| = 7 , \quad |AB| = |BA| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = 14$$

3ـ6ـ اشتقاق المحددات :

اذا كانت لدينا مصفوفة مربعة من الدرجة n عناصرها a_{ij} عبارة عن توابع لـ X أي :

$$A = \begin{bmatrix} f_{11}(X) & f_{12}(X) & \dots & f_{1n}(X) \\ f_{21}(X) & f_{22}(X) & \dots & f_{2n}(X) \\ \vdots & & & \\ f_{n1}(X) & f_{n2}(X) & \dots & f_{nn}(X) \end{bmatrix}$$

فان مشتق محدد هذه المصفوفة $\frac{d|A|}{dX}$ هو عبارة عن مجموع n من المحددات نحصل عليها بعد التعويض عن عناصر أحد السطور (أو الاعمدة) في كل محدد بمشتقات العناصر المشكلة له .

مثال : اذا كانت لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} X^2 & X+1 & 3 \\ 1 & 2X-1 & X^3 \\ 0 & X & -2 \end{bmatrix}$$

فان :

$$\frac{d|A|}{dX} = \frac{d}{dX} \begin{vmatrix} X^2 & X+1 & 3 \\ 1 & 2X-1 & X^3 \\ 0 & X & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2X & 1 & 0 \\ 1 & 2X-1 & X^3 \\ 0 & X & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X^2 & X+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3X^2 \\ 0 & X & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X^2 & X+1 & 3 \\ 1 & 2X-1 & X^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 + 4X - 12X^2 - 6X^5$$

تمارين :

1ـ اذا كان لديك المحدد :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

1ـ أحسب قيمة المحددات الصغيرة للعناصر a_{11} ، a_{31} ، a_{23} ، a_{32} .

2ـ أحسب قيمة المحددات المرافقة للعناصر a_{12} ، a_{32} ، a_{33} .

2ـ أجسب قيمة المحددات التالية :

$$|A| = \begin{vmatrix} X-1 & 2 \\ -3 & X+3 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad |D| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3ـ اذا كان لديك المحددات التالية :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

نلاحظ أن المحددان متساويان بالقيمة المطلقة كيف تفسر ذلك ؟

4ـ بناء على ما لاحظناه في التمرين رقم 3 ماذا تتوقع بالنسبة للمحددين :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} \text{ ،} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

تأكد من ذلك.

5ـ اذا كان لديك :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

1ـ أحسب قيمة المحددين $|A|$ و $|B|$ ماذا تلاحظ ؟

2ـ أحسب $|A'|$ و $|B'|$ ماذا تلاحظ ؟

6ـ أحسب قيمة المحددين :

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

ماذا تلاحظ ؟

7ـ أحسب قيمة المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} X & X & X \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & X & X \\ X & 4 & X \\ X & X & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & X & X^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

8ـ بين ان المحدد :

$$\begin{vmatrix} 6-t & 3 & 1 \\ 2 & 4-t & 2 \\ 1 & 5 & 7-t \end{vmatrix}$$

يمكن كتابته كالتالي :

$$-t^3 + 17t^2 - 77t + 78$$

9ـ بين أن المحدد :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 10 & -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$-(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

10ـ بين أن المحدد :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

يمكن كتابته على الشكل التالي : $-\lambda^3 + 10\lambda + 12$

11ـ بين صحة الخاصية التالية : ان قيمة المحدد لا تتغير اذا أضفنا الى عناصر أحد الأعمدة (أو الأسطر) مضاعف سطر آخر (أو عمود آخر).

من خلال المحدد التالي :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

مبينا أن قيمة هذا المحدد :

أ ـ لا تتغير عندما نضيف الى السطر الأول مضاعفات من λ السطر الثاني.

ب ـ لا تتغير عندما نضيف الى العمود الأول مضاعفات من λ العمود الثالث.

12ـ باستخدام الخاصة الواردة في التمرين 11 أحسب المحددات التالية :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} \qquad |A_2| \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 12 \\ 7 & 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 18 & 9 \\ 2 & 13 & 13 & 5 \\ 4 & 29 & 31 & 17 \\ -2 & -8 & 2 & 6 \end{vmatrix} \qquad |A_6| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

13ـ أحسب قيمة المحددات التالية :

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

14ـ اذا كان لديك المحددان :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$$

أحسب ما يلي

- $|A| + |B|$
- $|A| - |B|$
- $|A| \cdot |B|$
- $|B| \cdot |A|$

15ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} X+1 & X^2 & X^2-3 & 0 \\ X^2 & 1 & & 1-X \\ X & X+1 & X^2+1 & X^3 \\ X^3-1 & 0 & X^2 & X \end{bmatrix}$$

أوجد مشتق محدد هذه المصفوفة .

16ـ أوجد مشتق محدد المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} \text{Sin } X & \text{Cos } X \\ -\text{Cos } X & X \end{bmatrix}$$

17ـ أوجد مشتق محددات المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} X & X-2 & X+2 \\ X^2 & 2X+1 & X^3 \\ 0 & 3X-2 & X^2+1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} X^2-1 & X-1 & 1 \\ X^4 & X^3 & 2X+5 \\ X+1 & X^2 & X \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} X+2 & X^2-3 & X+1 \\ X^2 & 0 & 2X+5 \\ X+1 & 5 & -X^2 \end{bmatrix}$$

الفصل الرابع : مقلوب المصفوفة .

4ـ1ـ مفهوم مقلوب المصفوفة :

تحدثنا الى الآن عن جمع و طرح و ضرب المصفوفات أما عملية القسمة فلم يرد عنها حديث، لأنه في جبر المصفوفات لا وجود لعملية قسمة مصفوفتين، و عملية القسمة $A : B$ نستعيض عنها بالكتابة $B.A^{-1}$ و نسمى المصفوفة A^{-1} بمقلوب المصفوفة A .

ان مقلوب المصفوفة هام جدا و قليل من المسائل الاقتصادية التي نحلها بدون اللجوء الى حساب و استخدام مقلوب المصفوفة . نوضح أهمية مقلوب المصفوفة من خلال المثال التالي :

معروف أن الأسعار و الكميات من السلع المباعة تتحدد في السوق وفقا للعرض و الطلب، لنفترض الآن أن منحنى الطلب على السيارات في فترة زمنية معينة باحدى الدول يتحدد وفقا للمعادلة :

$$X_1 = 12000 - 0,2\ X_2$$

حيث X_1 - سعر السيارة، X_2 - الكمية المقابلة (الكمية المطلوبة عند السعر X_1)

و ان منحنى العرض يتحدد وفقا للمعادلة :

$$X_1 = 300 + 0,1\ X_2$$

لنبحث الآن عن الكميات و الأسعار التوازنية (الكميات و الأسعار التي تتحدد عند تلاقي العرض مع الطلب). ان ذلك يتم بواسطة حل المعادلتين :

$$X_1 = 12000 - 0,2\ X_2$$

$$X_1 = 300 + 0,1\ X_2$$

يمكن حل هاتين المعادلتين عن طريق التعويض :

$$300 + 0,1\ X_2 = 12000 - 0,2\ X_2$$

و منه $X_2 = 39000$ (الكمية المطلوبة من السيارات عند السعر التوازني X_1)

$X_1 = 4200$ (سعر السيارة التوازني) .

ان طريقة التعويض هذه لحل جملة المعادلات يمكن استخدامها عندما يتعلق الأمر بعدد محدود من المعادلات و المجاهيل ـ كما رأينا في المثال السابق معادلتين بمجهولين ـ أما عندما يتعلق الأمر بعدد كبير من المعادلات و كذلك المجاهيل، فاننا نضطر الى استخدام المصفوفات لانها وسيلة فعالة و سريعة . و المثال السابق كان بامكاننا حله بواسطة المصفوفات و ذلك بوضع :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 12000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

و نكتب :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

و باختصار نكتب : $AX = B$

و بالتالي شعاع المجاهيل X يساوي : $X = A^{-1} B$

نلاحظ أن الشعاع B معروف لدينا، اذا يجب حساب مقلوب المصفوفة A أي الحصول على A^{-1} ، و هو يساوي :

$$A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -0,2 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$$

(سنبين فيما بعد كيفية حساب مقلوب المصفوفة)

اذا :

$$X = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -0,2 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

و بالتالي :

$$X = \begin{bmatrix} 4200 \\ 39000 \end{bmatrix}$$

اذا :

$$X_1 = 4200$$
$$X_2 = 39000$$

و هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها عندما استخدما طريقة التعويض.

4-2- المصفوفة النظامية و المصفوفة الشاذة :

نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة نظامية اذا كان محددها لا يساوي الصفر، $|A| \neq 0$ ، بينما نقول عنها أنها مصفوفة شاذة اذا كان محددها يساوي صفر، $|A| = 0$.

فمثلا بالنسبة للمصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نقول عن المصفوفة A أنها شاذة لأن : $|A| = 0$

بينما نقول عن المصفوفة B أنها نظامية لأن $|A| = -3 \neq 0$

و يترتب عن كون المصفوفة شاذة أم نظامية نتائج هامة كما سنرى فيما بعد.

4-3- شروط وجود مقلوب المصفوفة :

هناك شرطان :

1- يمكن الحصول على مقلوب المصفوفة A^{-1} فقط اذا كانت المصفوفة A مربعة.

2- المصفوفة A^{-1} لها وجود فقط في حالة ما اذا كانت المصفوفة الأصلية A نظامية (أي محددها لا يساوي صفر $|A| \neq 0$).

4-4- خصائص مقلوب المصفوفة :

اذا كانت المصفوفة A مربعة و نظامية فان المصفوفة A^{-1} تتمتع بالخصائص التالية :

1- المصفوفة A^{-1} تحقق العلاقة : $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

أي أن ضرب A^{-1} في A سواء من اليسار أو من اليمين ينتج عنه مصفوفة أحاديـــــة.

2- مقلوب المصفوفة المربعة النظامية وحيد. أي أنه اذا كانت A مصفوفة مربعة و نظامية فان هناك مصفوفة واحدة S تحقق العلاقة $AS = SA = I$ هي $S = A^{-1}$.

3- محدد مقلوب المصفوفة A يساوي الى مقلوب محدد المصفوفة الأصلية أي :

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{و بالتالي :} \quad |A^{-1}| \, . \, |A| = 1$$

نتيجة : من خلال هذه الخاصية يمكننا التأكد من أن المصفوفة الشاذة ليس لها مقلـــــوب، فاذا كانت المصفوفة A شاذة أي : $|A| = 0$.

حسب الخاصية رقم -3 لدينا : $|A^{-1}| \, . \, |A| = 1$

و لما كان $|A| = 0$ فان : $|A^{-1}| \, . \, |A| = 1$

$$0 = 1 \; !$$

و هذا مستحيل.

4- اذا أمكن ايجاد المقلوب A^{-1} فان هذه المصفوفة الأخيرة نظامية، أي مقلوب المصفوفـــة المربعة النظامية هو أيضا مصفوفة مربعة نظامية.

5- مقلوب المقلوب هو عبارة عن المصفوفة الأصلية، أي أن : $A = (A^{-1})^{-1}$

6- مقلوب منقول المصفوفة يساوي الى منقول مقلوبها، أي أن : $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

7ـ اذا كانت المصفوفة A متناظرة فان مقلوبها A^{-1} أيضا مصفوفة متناظرة .

أي أنه اذا كانت : $A' = A$ فان : $(A^{-1})' = A^{-1}$

8ـ مقلوب جذاء عدة مصفوفات مربعة نظامية من نفس الدرجة يساوي الى جذاء مقلوباتها بترتيب معكوس.

ففي حالة مصفوفتين فان : $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

و في حالة ثلاثة مصفوفات : $(ABC)^{-1} = C^{-1}\ B^{-1}\ A^{-1}$

و هكذا بالنسبة لـ n من المصفوفات.

9ـ اذا حقق مقلوب المصفوفة A المساواة : $A^{-1} = A'$ فاننا نقول عن المصفوفة الأصلية A أنها مصفوفة متعامدة .

ينتج أن المصفوفة المتعامدة تحقق العلاقة : $A\ A' = I$

4ـ5ـ حساب مقلوب المصفوفة :

هناك عدة طرق لحساب مقلوب المصفوفة منها :

1ـ عن طريق المصفوفة المساعدة .

2ـ عن طريق التحويلات الأولية .

3ـ طريقة التجزأة .

سنتعرف هنا على الطريقتين الأولى و الثانية نظرا لاعتمادهما في أغلب التطبيقات الاقتصادية .

4ـ5ـ1ـ حساب مقلوب المصفوفة عن طريق المصفوفة المساعدة :

ماهي المصفوفة المساعدة ؟

اذا كانت المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فان مصفوفتها المساعدة يرمز لها بـ $\Gamma(A)$ و هي تساوي :

$$\Gamma(A) = \left[A_{ij}\right]' = \left[A_{ji}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ان المصفوفة المساعدة هي عبارة عن المنقول للمصفوفة التي عناصرها المحددات الصغيرة لعناصر المصفوفة المفروضة A ، و التي يتم الحصول عليها بعد الغاء السطر i و العمود j و ضربها بالاشارة $(-1)^{i+j}$ أي أن :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \; |A_{ij}|$$

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

فان مصفوفتها المساعدة هي :

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

لكي نحصل على العنصر A_{11} نأخذ المحدد الصغير المتبقي من المصفوفة A بعد الغاء السطر الأول و العمود الأول مضروب في $(-1)^{1+1}$، أي :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

و للحصول على العنصر A_{21} نأخذ المحدد الصغير المتبقي من المصفوفة A بعد حذف السطر الثاني و العمود الأول، أي :

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

و بنفس الطريقة نحصل على جميع عناصر المصفوفة المساعدة و يكون لدينا :

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

علاقة مقلوب المصفوفة بالمصفوفة المساعدة :

ترتبط كل مصفوفة بمصفوفتها المساعدة بالعلاقة : $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Gamma(A)$

ينتج أنه لكي يتم حساب مقلوب المصفوفة عن طريق المصفوفة المساعدة يجب المرور بالخطوات التالية :

1ـ حساب المحدد $|A|$.

2ـ حساب المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$.

3ـ حساب مقلوب المصفوفة بتطبيق العلاقة: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Gamma(A)$

مثال : احسب مقلوب المصفوفة A بتطبيق العلاقة . $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Gamma(A)$

حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1ـ نحسب أولا محدد المصفوفة :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

2ـ نحسب المصفوفة المساعدة .

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 11 & 6 & -15 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

3ـ أخيرا نطبق العلاقة :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \Gamma(A) = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 11 & 6 & -15 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

يمكننا اعطاء شكل نهائي للمصفوفة A^{-1} بضرب جميع عناصر المصفوفة في $\frac{1}{20}$ كما يمكن الابقاء على الكتابة السابقة.

4-5-2- حساب مقلوب المصفوفة عن طريق تطبيق التحويلات الأولية :

التحويلات الأولية في مصفوفة هي :

1- تبادل مواقع سطرين (أو عمودين).

2- ضرب عناصر أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) في عدد ما $k \neq 0$.

3- الاضافة الى عناصر سطر (أو عمود) جذاء عناصر سطر آخر (أو عمود آخر).

اذا كانت المصفوفة B ناتجة عن المصفوفة A بعد تطبيق تحويلات أولية فاننا نقول أن المصفوفتان متكافئتان و نكتب $B \sim A$.

تعريف : نقول عن المصفوفتان A و B أنهما متكافئتان اذا كانت احداهما ناتجة عن الأخرى بعد تطبيق تحويلات أولية.

سنعود الى موضوع تكافؤ المصفوفات و أهميته عندما سنأتي على موضوع رتبة المصفوفة.

كيفية حساب مقلوب المصفوفة بتطبيق التحويلات الأولية :

لدينا مما سبق أن : $A = I . A$

ان تطبيق أي تحويلات أولية على أسطر (أو أعمدة) المصفوفة I ينتج عنه تطبيق نفس التحويلات الأولية على أسطر (أو أعمدة) المصفوفة A فاذا طبقنا تحويلات أولية متتالية حتى تصبح العلاقة السابقة : $I = Y . A$

ينتج أن المصفوفة Y هي المقلوب A^{-1} المطلوب حسابه لأن مقلوب المصفوفة المربعة النظامية وحيد (كما رأينا في خصائص مقلوب المصفوفة - الخاصية رقم -2).

مثال -1 : اذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

نرتب العمل بكتابة المصفوفة A و بجانبها المصفوفة I مفصولتين بخط ثم نطبق على المصفوفة الموسعة الجديدة $[A \mid I]$ تحويلات أولية حتى نحول المصفوفة A الى مصفوفة أحادية و تكون المصفوفة الناتجة مكان المصفوفة I هي المقلوب A^{-1} .

اذا نكتب :

$$[A_{3x3} \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

من أجل تحويل المصفوفة A الى مصفوفة أحادية يجب اجراء تحويلات أولية بحيث :

1ـ نحول العنصر a_{11} من المصفوفة الى 1 ($a_{11} = 1$).

2ـ نحول جميع العناصر المتبقية من العمود الأول الى عناصر تساوي صفر ($a_{21} = a_{31} = 0$).

3ـ نحول العنصر a_{22} الى 1 ($a_{22} = 1$).

4ـ نحول بقية عناصر العمود الثاني الى أصفار، ($a_{12} = a_{32} = 0$).

5ـ نحول العنصر a_{33} الى 1، ($a_{33} = 1$) .

6ـ نحول بقية عناصر العمود الثالث الى أصفار، ($a_{13} = a_{23} = 0$).

لنرى الآن كيف يمكن تحقيق هذه الخطوات بالنسبة لمثالنا.

نلاحظ أن العنصر $a_{11} = 1$ ، اذا ننتقل مباشرة الى تحويل العنصر a_{21} الى صفر، ان ذلك ممكن عن طريق ضرب عناصر السطر الأول في (1ـ) و جمعها الى عناصر السطر الثاني، أي : ($-1 R_1 + R_2$).

$$\begin{array}{c} -R_1 + R_2 \\ \begin{array}{cccccc} -1 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

بضرب السطر الأول في (1ـ) و جمع عناصره الى عناصر السطر الثالث أي : $-R_1 + R_3$

نحصل على :

$-R_1 + R_3$

-1 -3 -3 - -1 0 0

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن العنصر $a_{22} = 1$ ، كذلك العنصر $a_{32} = 0$ ، اذا ننتقل مباشرة الى تحويل العنصر $a_{12} = 0$ ، من أجل ذلك نضرب عناصر السطر الثاني في (3ـ) و نجمع الى عناصر السطر الأول :

$-3R_2 + R_1$

0 - 3 0 3 - 3 0

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & -0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن العنصر $a_{33} = 1$ ، كذلك العنصر $a_{23} = 0$ ، اذ ننتقل مباشرة الى تحويل العنصر a_{13} لكي يساوي صفرا ، ان ذلك ممكن عن طريق ضرب عناصر السطر الثالث في (3ـ) و جمعها الى عناصر السطر الأول :

$-3R_3 + R_1$

0 0 - 3 3 0 - 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

و هكذا فان :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 2ـ : اذا كانت لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

نكون المصفوفة الموسعة :

$$[A_2 \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_2/7}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \overset{-4R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

و بالتالي يكون لدينا :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

يمكن استخدام الأعمدة بدلا من الأسطر من أجل الحصول على مقلوب المصفوفة عن طريق التحويلات الأولية .

مثال : اذا كانت لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

نقوم بتوسيع المصفوفة A وفقا للشكل التالي :

$$\left[\frac{A_3}{I_3}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

عندما نستعمل الأعمدة نقوم بتصفية الأسطر أي نحول $a_{11} = 1$ ثم $a_{12} = a_{13} = 0$ و ننتقل الى السطر الثاني لنحول $a_{22} = 1$ ثم $a_{21} = a_{23} = 0$.

و أخير السطر الثالث لنحول $a_{33} = 1$ ثم $a_{31} = a_{32} = 0$.

اذا بالنسبة لمثالنا :

$$\left[\frac{A}{I}\right] = \overset{-C_3 + C_2}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]} \sim \overset{-3C_1 + C_3}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]} \sim \overset{-C_2 + C_1}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]}$$

$$\overset{C_3 + C_2}{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]} \sim \overset{-2C_3 + C_1}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]} \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

و بالتالي :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : اذا صادفنا أثناء قيامنا بالتحويلات الأولية على مصفوفة فيها جميع عناصر أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) مساوية للصفر فاننا نستنتج أن هذه المصفوفة شاذة و لا يمكن ايجاد مقلوب لها.

فمثلا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[A \mid I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-2R_1 + R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن عناصر السطر الثالث من المصفوفة الأخيرة قد تحولت جميعها إلى أصفار نستنتج أن المصفوفة A شاذة و لا يمكن ايجاد مقلوب لها.

4-6- مقلوب المصفوفة من اليسار و مقلوب المصفوفة من اليمين :

كنا قد ذكرنا من قبل شروط وجودمقلوب المصفوفة و هي أن تكون المصفوفة مربعة و نظامية، فقط عند تحقق هذين الشرطين يمكن أن تتحقق العلاقة.

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I$$

غير أنه يمكن أن نصادف بعض المصفوفات المستطيلة Arxc حيث $r \neq c$ و التي تحقق مع المصفوفة Bcxr العلاقة AB = Ir و لكن $BA \neq I_c$ في هذه الحالة نقول أن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A من اليمين.

كما يمكن أن نصادف حالة أخرى حيث تحقق المصفوفة Arxc مع المصفوفة Dcxr العلاقة DA = Ic في حين أن $AD \neq Ir$ و نقول أن المصفوفة D هي مقلوب المصفوفة A من اليسار.

أما مقلوب المصفوفة الذي يمكن أن يكون مقلوبا من اليسار و من اليمين في نفس الوقت فلا وجود له سوى بالنسبة للمصفوفات المربعة النظامية.

4-7- شرط امكانية وجود مقلوب المصفوفة من اليسار أو من اليمين :

ان العلاقة Bcxr = Ir . Arxc يمكن أن يكون لها وجود فقط اذا كانت رتبة* المصفوفتان A و B يساوي على الأقل r . كذلك بالنسبة للعلاقة Dcxr . Arxc = Ic فان Dcxr يمكن أن يكون لها وجود فقط في حالة ما اذا كانت رتبة المصفوفة A تساوي على الأقل c . و لما كانت المصفوفة المستطيلة بها $r \neq c$ فان رتبة A لا يمكنها أن تكون أكبر من أصغر المقدارين c و r لهذا فان الرتبة لن تساوي هذين المقدارين معا أو تتجاوزهما، لهذا

---

* رتبة المصفوفة يختلف عن درجة المصفوفة وسنتعرف على مفهوم الرتبة لاحقا.

ففي حالة $r \neq c$ فانه لا يمكن أن يكون للمصفوفتان Dcxr و Bcxr وجود في نفس الوقت بحيث تحققان المساواة.

$$AB = Ir \quad , \quad DA = Ic$$

و الممكن فقط هو تحقق مساواة واحدة. ففي حالة ما اذا كانت A مصفوفة ذات رتبة مساوية لعدد أسطرها فانه يمكن الحصول على المصفوفة B ، مقلوب المصفوفة من اليمين أي تحقق العلاقة.

$$AB = I$$

أما اذا كانت رتبة A مساوية لعدد أعمدتها فانه يمكن الحصول على المصفوفة D ، مقلوب المصفوفة من اليسار حيث تتحقق العلاقة.

$$DA = I$$

4-8- القوى السالبة لمصفوفة :

تعرّف القوى السالبة لمصفوفة مربعة على أنها المصفوفة المرفوعة الى قوى سالبة A^{-1} ، A^{-2} ... و هكذا.

في جبر المصفوفات يمكننا أن نكتب :

- $(A^{-1})^2 = A^{-1} . A^{-1}$
- $A^{-3} = A^{-2} . A^{-1}$
- $A^{-n} . A^{m} = A^{-n+m}$
- $(A^{-n})^m = A^{-n.m}$

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

و كان المطلوب ايجاد المصفوفة A^{-2}.

فان ذلك ممكن اما عن طرق ايجاد A^2 حيث $A^2 = A . A$ ،

ثم حساب مقلوب A^2 و نحصل على A^{-2}.

اما أن نوجد أولا مقلوب المصفوفة A لنحصل على A^{-1} ،

ثم نحصل على A^{-2} حيث $A^{-2} = A^{-1} . A^{-1}$ و في كلتا الحالتين :

$$A^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

تمارين

1ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

تأكد أن : $A A^{-1} = A^{-1} A = I$

2ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

تأكد أن : $B B^{-1} = B^{-1} B = I$

3ـ هل يمكن ايجاد مقلوب المصفوفات التالية ؟

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} X & 4 & 4 \\ 4 & X & 4 \\ 4 & 4 & X \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

لماذا ؟

4ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة A^{-2} ثم A^2 .

5ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

أحسب المصفوفة A^{-2} .

6ـ أحسب مقلوب المصفوفات التالية باستخدام الصيغة : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \Gamma(A)$

حيث $\Gamma(A)$ هي المصفوفة المساعدة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

7ـ أحسب مقلوب المصفوفات التالية باستخدام التحويلات الأولية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

8ـ أوجد مقلوب المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \\ 1 & 1 & 16 & 16 & 81 \end{bmatrix}$$

9ـ اثبت أن المصفوفة التالية مصفوفة متعامدة :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

الفصل الخامس : اشتقاق و تكامل المصفوفات

5-1- اشتقاق المصفوفات :

اذا كانت لدينا المصفوفة $A = \left[a_{ij} \ (x) \right]$ و التي جميع عناصرها a_{ij} توابع للمتغير x ، فان مشتق المصفوفة A بالنسبة للمتغير x يعرف بأنه المصفوفة الجديدة التي لها نفس درجة المصفوفة الأصلية A و عناصرها هي المشتقات بالنسبة لـ x و تكتب $\frac{dA}{dx}$.

فاذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث $a_{ij} = f\ (x)$ فان :

$$\frac{dA}{dx} = \frac{da_{ij}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} \cdots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} \cdots & \frac{da_{2n}}{dx} \\ \vdots & & \\ \frac{da_{m1}}{dx} & \frac{da_{m2}}{dx} \cdots & \frac{da_{mn}}{dx} \end{bmatrix}$$

مثال : أحسب مشتق المصفوفة A بالنسبة لـ x حيث :

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 1-x & 1 \\ 3x & 1 & x+1 \\ 0 & x^2 & x^2+1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dA}{dx} = \begin{bmatrix} 2x & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2x & 2x \end{bmatrix}$$

و بنفس الطريقة يمكن الحصول على المشتق الثاني للمصفوفـــــة A :

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

و هكذا يمكن الحصول على مشتق المصفوفة من المرتبة الثالثة و الرابعة ... الخ.

5-2- المشتقات الجزئية لمصفوفة :

اذا كانت عناصر المصفوفة A توابع لأكثر من متغير واحد، مثلا توابع لـ x و y . فاننـــا نعرف المشتق الجزئي للمصفوفة A لكل من x و y كالتالي :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial y}\right]$$

و بنفس الطريقة تعرف المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}$$

و بنفس الطريقـة يمكننا الحصول على المشتقات الجزئية من المرتبة الثالثة و الرابعـــة ... الخ.

مثال : بفرض أن :

$$A = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & \text{Sin } x \\ \text{Sin } y & 3 \end{bmatrix}$$

فان :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x & \text{Cos } x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ \text{Cos } y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 2 & -\text{Sin } x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\text{Sin } y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5-3- تكامل المصفوفات :

اذا كانت لدينا المصفوفة $A = \left[a_{ij}(x)\right]$ حيث العناصر a_{ij} توابع لـ x فان تكامـــل هذه المصفوفة بين النقطتين to و t (حيث to < t) يكتب :

$$\int_{to}^{t} A \, dx$$

و هو عبارة عن مصـفوفة عناصرها عبارة عن تكامل عناسر المصفوفة المفروضة A بين النقطتين to و t . و لا يكون لهذه العملية معنى الآ اذا كان التكامل ممكننا بالنسبة لجميع عناصـر هذه المصفوفة .

فاذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث : $a_{ij} = f(x)$.

فان :

$$\int_{to}^{t} A\,dx = \begin{bmatrix} \int_{to}^{t} a_{11}\,dx & \int_{to}^{t} a_{12}\,dx & \cdots \int_{to}^{t} a_{1n}\,dx \\ \int_{to}^{t} a_{21}\,dx & \int_{to}^{t} a_{22}\,dx & \cdots \int_{to}^{t} a_{2n}\,dx \\ \vdots & & \\ \int_{to}^{t} a_{m1}\,dx & \int_{to}^{t} a_{m2}\,dx & \cdots \int_{to}^{t} a_{mn}\,dx \end{bmatrix}$$

مثال :

أوجد $\int_{0}^{1} A\,dx$ حيث : $A = \begin{bmatrix} x^3 & 2 \\ x^2+1 & x-1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\int_{0}^{1} A\,dx = \begin{bmatrix} \int_{0}^{1} x^3\,dx & \int_{0}^{1} 2\,dx \\ \int_{0}^{1} (x^2+1)\,dx & \int_{0}^{1} (x-1)\,dx \\ \int_{0}^{1} 3\,dx & \int_{0}^{1} 0\,dx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1 & \left.2x\right|_0^1 \\ \left.\dfrac{x^3}{3}+x\right|_0^1 & \left.\dfrac{x^2}{2}-x\right|_0^1 \\ \left.3x\right|_0^1 & \left.k\right|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & 2 \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{-1}{2} \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

تمارين :

1ـ أحسب $\frac{dA}{dt}$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} e^t & Cost \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2ـ أحسب $\frac{dA}{dx}$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} x^3+1 & x-1 & x^2 \\ x+1 & x^4 & 3x-1 \\ 2x^2+x & x^2 & -x+1 \end{bmatrix}$$

3ـ أحسب $\frac{dA}{dx}$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & x & x \\ x & 4 & x \\ x & x & 4 \end{bmatrix}$$

4ـ أحسب $\frac{dA}{dx}$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5ـ أحسب $\frac{dA}{dx}$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{bmatrix}$$

6ـ أحسب $\frac{dA}{dx}$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} Sin\ x & Cos\ x \\ -Sin\ x & Cos\ x \end{bmatrix}$$

7ـ أحسب $\frac{dA}{dt}$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} Sin\ t & Cos\ t \\ Cos\ t & Sin\ t \end{bmatrix}$$

8ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} x^2+y^2 & Sin\ x \\ Sin\ x & 3 \end{bmatrix}$$

أحسب المشتقات الجزئية : $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$

9ـ اذا كان لديك المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} x^2+y & x-2y & 3x^2 \\ x^2+y^2 & y^2-1 & y^2+1 \\ 2 & x^2-1 & 3x-y \end{bmatrix}$$

أحسب المشتقات الجزئية : $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}$

10ـ اذا كانت لديك المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} x^2 y - y^2 & \cos x - \cos y & x y^2 - x^3 \\ 3xy - x & \sin x + x & x^2 y^2 + 3x \\ 2 & 1 - \tan x & x y - 2 \end{bmatrix}$$

أحسب المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$$

11ـ أحسب التكامل $\int_1^2 A\,dx$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{x} \\ x^2 & 1 + x \end{bmatrix}$$

12ـ أحسب التكامل $\int_{-1}^1 B\,dx$ حيث :

$$B = \begin{bmatrix} e^x & x & 1 \\ x^2+1 & x-1 & 0 \\ 0 & x & e^{-x} \end{bmatrix}$$

13ـ أحسب التكامل $\int_0^5 W\,dx$ حيث :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & x \\ 3 & x^2 \end{bmatrix}$$

الفصل السادس

الارتباط و الاستقلال الخطي في المصفوفات

نقول عن المصفوفات : $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ أنها مرتبطة خطيا اذا أمكن ايجاد k من الأعداد الحقيقية : $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_k$ و التي لا تساوي جميعها الصفر حيث :

$$U_1 A_1 + U_2 A_2 + U_3 A_3 + \ldots + U_k A_k = 0$$

أما اذا لم تتحقق العلاقة : $U_1 A_1 + U_2 A_2 + U_3 A_3 + \ldots + U_k A_k = 0$ الآ من أجل : $U_1 = U_2 = U_3 = \ldots U_k = 0$ فاننا نقول عن المصفوفات $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ أنها مستقلة خطيا.

مثال ـ 1 : هل الأشعة التالية مرتبطة خطيا ؟

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بفرض U_1 , U_2 , U_3 أعداد حقيقية لنبرهن أن العلاقة : $U_1 A_1 + U_2 A_2 + U_3 A_3 = 0$ محققة من أجل U_1 , U_2, U_3 لا تساوي جميعها الصفر.

لدينا :

$$U_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + U_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + U_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالتالي :

$$\begin{bmatrix} 2U_1 \\ 3U_1 \\ U_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_2 \\ 2U_2 \\ -4U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3U_3 \\ U_3 \\ 5U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و منه يمكننا تشكيل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 2U_1 - U_2 + 3U_3 &= 0 \\ 3U_1 + 2U_2 + U_3 &= 0 \\ U_1 - 4U_2 + 5U_3 &= 0 \end{aligned}$$

بحل هذه الجملة من المعادلات نجد أن هناك حلا عاما : $U_1 = - U_2 = - U_3$

و باعطاء قيمة اختيارية لـ U_3 و لتكن a يصبح لدينا :

$$U_1 = - a \ , \ U_2 = a \ , \ U_3 = a$$

اذا الأشعة المفروضة مرتبطة خطيا وفقا للعلاقة : $- a A_1 + a A_2 + a A_3 = 0$

مثال ـ 2 : برهن أن المصفوفات التالية مستقلة خطيا :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

لنفرض أن الأعداد الحقيقية : U_1 , U_2 , U_3 , U_4 حيث :

$U_1 A_1+U_2 A_2+U_3 A_3+U_4 A_4 = 0$ لا تتحقق الآ من أجل : $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$

أي :

$$U_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + U_2 \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + U_3 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} + U_4 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اذا :

$$\begin{bmatrix} U_1 & 2U_1 \\ 3U_1 & 4U_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6U_2 & 8U_2 \\ 8U_2 & 9U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4U_3 & 5U_3 \\ 7U_3 & 7U_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3U_4 & 4U_4 \\ 5U_4 & 7U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و منه يمكن تشكيل جملة المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} U_1 + 6U_2 + 4U_3 + 3U_4 &= 0 \\ 2U_1 + 8U_2 + 5U_3 + 4U_4 &= 0 \\ 3U_1 + 8U_2 + 7U_3 + 5U_4 &= 0 \\ 4U_1 + 9U_2 + 7U_3 + 7U_4 &= 0 \end{aligned}$$

يلاحظ أن هذه الجملة من المعادلات فيها عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات و لهـــا

فقط الحل الصفري أي : $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$

و ذلك لأن محدد مصفوفة الأمثال يختلف عن الصفر :

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \end{vmatrix} = -16$$

اذا المصفوفات المفروضة A_1 , A_2 , A_3 , A_4 مستقلة خطيا.

ملاحظة : سنتعرف في الفصل الثامن عن كيفية حل جملة المعادلات الخطية بمختلف أنواعها.

التركيب الخطي :

يلاحظ أنه اذا كانت الأشعة : $A_1 , A_2 \ldots A_k$ مرتبطة خطيا فانه يمكن تعيين أحدها كتركيب خطي بالنسبة للأشعة الباقية و يمكننا أن نبين ذلك وفقا لمايلي :

اذا كانت الأشعة : $A_1 , A_2 \ldots A_k$ مرتبطة خطيا فانه يمكن تعيين الأعداد الحقيقية $U_1\ U_2\ \ldots\ U_k$ و التي لا تساوي جميعها الصفر بحيث :

$$U_1 A_1 + U_2 A_2 + \ldots + U_i A_i + \ldots + U_k A_k = 0$$

و بفرض أن $U_i \neq 0$ فانه يمكن تقسيم طرفي العلاقة السابقة على U_i و نحسب منها A_i أي :

$$A_i = -\frac{U_1}{U_i} A_1 - \frac{U_2}{U_i} A_2 - \ldots - \frac{U_k}{U_i} A_k$$

أي أن : $A_i = B_1 A_1 + B_2 A_2 + \ldots + B_k A_k$

ينتج أن A_i تركيب خطي للأشعة الباقية.

مثال ـ1 : برهن أن الشعاع :

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

هو تركيب خطي للأشعة :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

اذا كان الشعاع B تركيبا خطيا للأشعة A_1 , A_2 , A_3 , A_4 فانه يمكن تعيين

الأعداد الحقيقية U_1, U_2, U_3, U_4 بحيث :

$$B = U_1 A_1 + U_2 A_2 + U_3 A_3 + U_4 A_4$$

أي :

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = U_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + U_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + U_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + U_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

و منه يمكن تشكيل جملة المعادلات غير المتجانسة التالية :

$$\begin{aligned} 2U_1 + U_2 + 5U_3 + U_4 &= 5 \\ U_1 + U_2 - 3U_3 - 4U_4 &= -1 \\ 3U_1 + 6U_2 - 2U_3 + U_4 &= 8 \\ 2U_1 + 2U_2 + 2U_3 - 3U_4 &= 2 \end{aligned}$$

و بحل هذه الجملة من المعادلات ينتج أن :

$$U_1 = 2 \;,\; U_2 = \frac{1}{5} \;,\; U_3 = 0 \;,\; U_4 = \frac{4}{5}$$

و منه فان B هو تركيب خطي للأشعة المفروضة A_1, A_2, A_3, A_4 و ذلك وفقا للعلاقـة التالية :

$$B = 2A_1 + \frac{1}{5} A_2 + 0 A_3 + \frac{4}{5} A_4$$

مثال ـ2 : هل الشعاع $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}'$ تركيب خطي للشعاعين :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اذا كان B تركيبا خطيا للشعاعين A_1 و A_2 فانه يمكن تعيين الأعداد الحقيقيـــة U_1 , U_2 بحيث :

$$B = U_1 A_1 + U_2 A_2$$

اذا :

$$\begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\end{bmatrix} = U_1\begin{bmatrix}3\\5\\1\\0\end{bmatrix} + U_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

و منه يمكن تشكيل جملة المعادلات غير المتجانسة :

$$\begin{aligned}3\,U_1 + U_2 &= 1\\ 5\,U_1 + U_2 &= 3\\ U_1 + 0 &= 1\\ 0 + U_2 &= 2\end{aligned}$$

و منه نجد أن : $U_1 = 1$ و $U_2 = 2$ غير أن هذه القيم لا تحقق المعادلتين الأولى و الثانية و الشعاع B ليس تركيبا خطيا للشعاعين A_1 و A_2 و الأشعة B ، A_2 ، A_1 مستقلة خطيا.

تمارين

1ـ برهن أن المصفوفات :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مستقلة خطيا .

2ـ برهن أن الأشعة :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مرتبطة خطيا .

3ـ برهن أن المصفوفة :

$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ هي تركيب خطي للمصفوفات :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

4ـ برهن أن الشعاع $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ هو تركيب خطي للشعاعين :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

5ـ هل الشعاع $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}'$ هو تركيب خطي للشعاعين :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}' \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

6ـ هل الشعاع : $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$ هو تركيب خطي للأشعة :

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}'$ $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}'$

$B_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}'$ $B_4 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}'$

7ـ هل الشعاع $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}'$ هو تركيب خطي للأشعة :

$W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $W_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $W_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $W_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

8ـ هل الأشعة التالية مرتبطة خطيا ؟

$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $Z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $Z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $Z_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

9ـ هل الشعاع $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو تركيب خطي للأشعة :

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $B_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

10ـ هل الشعاع $W = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ هو تركيب خطي للأشعة :

$W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $W_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $W_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $W_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

الفصل السابع :

رتبة المصفوفة :

7-1- مفهوم رتبة المصفوفة :

نقول عن المصفوفة $A \neq (0)$ أنها من المرتبة r اذا كان هناك على الأقل محدد صغير مربع من الدرجة r في هذه المصفوفة لا يساوي الصفر بينما كل المحددات الصغيرة التي هي من الدرجة $r + 1$ و $r + 2$ ... الخ، مساوية للصفر. سنرمز لرتبة المصفوفة A بالرمز $P(A)$ و نكتب : $P(A) = r$

و المحدد الصغير في مصفوفة هو محدد أية مصفوفة جزئية مربعة في هذه المصفوفة.

فاذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

يلاحظ أن أكبر محدد صغير في هذه المصفوفة هو من الدرجة 3 و المصفوفة A تحتوي على 4 محددات من الدرجة 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

كما يحتوي كل محدد من هذه المحددات من الدرجة 3 على محددات من الدرجة 2 عددها 9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

7-2- تحديد رتبة المصفوفة :

اذا كانت لدينا المصفوفات التالية :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

نحسب محددات هذه المصفوفات و نجد أن :

$$|A_1| = 20 \Longrightarrow P(A) = 3$$

أي أن المحدد ليس معدوما و هذا يعني أن رتبة المصفوفة A_1 تساوي درجة المحدد و درجة المحدد $|A_1|$ هي درجة المصفوفة A_1 .

$$|A_2| = 0 \Longrightarrow P(A) < 3$$

بما أن محدد المصفوفة معدوما هذا يعني مباشرة أن الرتبة أقل من الدرجة ، و بالتالي يجب البحث عن المحددات التي هي أقل من الدرجة 3 أي المحددات من الدرجة 2 و يكفي أن نجد محددا واحدا من الدرجة 2 في هذه المصفوفة لا يساوي الصفر لنقول أن رتبة هذه المصفوفة هي 2.

و نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \Longrightarrow P(A_2) = 2$$

أما بالنسبة للمصفوفة A_3 فاننا نجد : $|A_3| = 0 \Longrightarrow P(A_2) < 3$

كما أن جميع المحددات الجزئية من الدرجة 2 معدومة و هذا يعني أن $P(A_3) < 2$ و بالتالي نقول أن $P(A_3) = 1$.

ملاحظة : تكون رتبة المصفوفة مساوية للصفر فقط في حالة ما اذا كان جميع عناصرها عبارة عن أصفار ، و يكفي أن يكون عنصرا واحدا يختلف عن الصفر حتى نقول أن رتبة هذه المصفوفة هي 1.

مثال آخر : حدد رتبة المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن أكبر محدد صغير في هذه المصفوفة هو من الدرجة 3. عند القيام بنشرها نجدها كلها تساوي الصفر، هذا يعني أن رتبة هذه المصفوفة هي أقل من 3 $P(A) < 3$.

ننتقل لاختبار المحددات من الدرجة 2 و نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

و بالتالي رتبة المصفوفة A هي 2، $P(A) = 2$.

يلاحظ أن استخدام هذه الطريقة ـ حساب قيمة المحددات الصغيرة ـ ينطوي على عمليات

مرهقة خاصة عندما يتعلق الأمر بمحددات من درجة عالية ، لحسن الحظ هناك طريقة أخرى. .

7-3- ارجاع مصفوفة الى مصفوفة مثلثية قطريا :

ان تطبيق التحويلات الأولية على أسطر أو أعمدة مصفوفة لا يغير من رتبتها ، فالمصفوفات المتكافئة رتبها متساوية .

اذا سنستخدم التحويلات الأولية لتحويل أية مصفوفة $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ لا تساوي الصفر و من المرتبة r الى الشكل :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ o & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ o & o & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} \\ o & o & \cdots & o & o & \cdots & o \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ o & o & \cdots & o & o & \cdots & o \end{bmatrix}$$

حيث $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr} \neq 0$

ان ذلك ممكن باتباع الخطوات التالية :

اذا كانت لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mr} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

لنفترض أن $a_{11} \neq 0$ و اذا لم يكن كذلك و بما أن $A \neq 0$ فيوجد على الأقل عنصر واحد $a_{ij} \neq 0$ ، عند ذلك نطبق التحويلات الأولية بحيث نحول عناصر العمود الأول الى أصفار عدى العنصر a_{11} .

فنحصل على مصفوفة من الشكل :

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ o & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ o & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

و حيث $a_{11} \neq 0$ فاذا كانت المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix} \neq 0$$

فاننا نطبق عليها تحويلات أولية الى أن نحصل في الأخير على المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

و التي فيها المحدد :

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdots b_{rr} \neq 0$$

مثال ـ1 : حدد رتبة المصفوفة التالية عن طريق تحويل المصفوفة الى مصفوفة مثلثية قطريـــا .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 15 & 14 & 7 \\ 2 & 9 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 15 & 14 & 7 \\ 2 & 9 & 10 & 5 \end{bmatrix} \overset{-2R_1 + R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 10 & 5 \end{bmatrix} \overset{-R_1 + R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-R_2 + R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ان رتبة هذه المصفوفة الأخيرة هي 2 لأن فيها المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ كما أن هذه المصفوفة الأخيرة تكافيء المصفوفة المفروضة A لأنها ناتجة عنها بتطبيق سلسلة من التحويلات الأولية، و بالتالي ينتج أن $P(A) = 2$.

مثال ـ 2 : حدد رتبة المصفوفة الآتية عن طريق تحويلها الى مصفوفة مثلثية قطريا، حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_1 + R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{-2R_1 + R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \overset{R_2 + R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ينتج أن رتبة هذه المصفوفة الأخيرة هي 3 لأن فيها المحدد :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1.\ 5.\ 4 = 20 \neq 0$$

كما أن هذه المصفوفة الأخيرة تكافيء المصفوفة المفروضة A لأنها ناتجة عنها بتطبيق سلسلة من التحويلات الأولية و بالتالي.

$$P(A) = 3$$

7ـ4ـ نتائج هامة :

1ـ اذا افترضنا أن عناصر المصفوفة A هي أمثال لجملة معادلات مفروضة. فاننا نستنتج أن رتبة المصفوفة تعني عدد المعادلات الأساسية في جملة المعادلات المفروضة.

و بالتالي فان رتبة المصفوفة تعني أيضا عدد الأسطر (أو الأعمدة) المستقلة خطيا.

2ـ اذا كانت المصفوفة المفروضة A من الدرجة mxn فان رتبة المصفوفة A لا يمكنهـا أن تكون أكبر من أصغر العددين n و m أي :

$$P(A) = r \leqslant \min.(m.n)$$

3ـ رتبة المصفوفة المربعة النظامية تساوي درجتها $P(A_n) = n$ حيث A مصفوفة مربعة و نظامية.

4ـ اذا كانت رتبة المصفوفة المربعة A تساوي درجتها هذا يعني أن A^{-1} لها وجود.

5ـ بفرض أن 'A منقول المصفوفة A فان : $P(A) = P(A')$

6ـ رتبة المصفوفة الأحادية تساوي درجتها : $P(I_n) = n$

تمارين

1ـ ماهي رتبة المصفوفات التالية ؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2ـ حدد رتبة المصفوفات التالية من خلال حساب محددات هذه المصفوفات أو المحددات الصغيرة فيها :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

3ـ حدد رتبة المصفوفات التالية عن طريق تحويل هذه المصفوفات الى مصفوفات مثلثية قطريا :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 6 & -10 & 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

4ـ اذا كانت رتبة المصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ هي 3 أي $P(A) = 3$

فما هي رتبة المصفوفة : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ لماذا ؟

5ـ اذا كانت لديك A مصفوفة نظامية من الدرجة 5 فما هي رتبتها ؟

الفصل الثامن :

جملة المعادلات الخطية :

8ـ1ـ مفهوم جملة المعادلات الخطية :

نذكر بأن جملة المعادلات تسمى خطية اذا كانت تحتوي على متغيرات من قوى ـ أس واحد و لا تحتوي على جذاء لمتغيرات .

فمثلا المعادلة : $X_1 + 2X_2 - 4X_3 = 5$ هي معادلة خطية .

أما المعادلة : $2X_1 X_2 - X_1^2 + 3X_3 = 2$ فهي ليست خطية .

و تكتب جملة المعادلات الخطية في شكلها العام و التي تحتوي على m معادلة و n مجهول كالتالي :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n = b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n = b_m$$

اذا كانت $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ فاننا نكتب جملة المعادلات السابقة باختصار $AX = 0$ و تسمى بجملة معادلات متجانسة .

أما اذا لم يكن كذلك فاننا نكتب باختصار $AX = B$ و تسمى بجملة معادلات غير متجانسة .

8ـ2ـ طرق حل جملة المعادلات الخطية :

هناك عدة طرق لحل جملة المعادلات الخطية سنستعرض بعض الطرق المصفوفية منها :

1ـ طريقة كرامر :

وفقا لهذه الطريقة فان $X_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

حيث : $|A|$ هو محدد مصفوفة الأمثال A .

و $|A_i|$ ، ($i = 1,2 \dots n$) هو محدد المصفوفة الناتجة عن المصفوفة A و ذلك بعد احلال العمود i بقيم العمود B . و بالتالي فاذا كان $|A| \neq 0$ فان لجملة المعادلات $AX = B$ الحل الوحيد :

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad , \ldots\ldots X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

أما اذا كانت جملة المعادلات متجانسة $AX = 0$ و كان $|A| \neq 0$ فاننا نستنتج أن هناك حلا وحيدا وهو :

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0$$

مثال ـ1 : اذا كانت لدينا جملة المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + 5X_3 + X_4 &= 5 \\ X_1 + X_2 - 3X_3 - 4X_4 &= -1 \\ 3X_1 + 6X_2 - 2X_3 + X_4 &= 8 \\ 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 3X_4 &= 2 \end{aligned}$$

الحل : نحسب أولا محدد مصفوفة الأمثال A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120$$

ثم نحسب $|A_1|$ و هو عبارة عن محدد المصفوفة A بعد أن نحذف منها العمود الأول و نحل محله العمود B حيث :

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اذا :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240$$

ثم نحسب $|A_2|$ ـ محدد المصفوفة A بعد حذف العمود الثاني و احلاله بالعمود B .

$$|A_2| \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24$$

و بنفس الطريقة نحسب $|A_3|$ و $|A_4|$.

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -96$$

و بالتالي :

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-240}{-120} = 2$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-24}{-120} = \frac{1}{5}$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{-120} = 0$$

$$X_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-96}{-120} = \frac{4}{5}$$

مثال ـ2 : حل جملة المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + 5X_3 + X_4 &= 0 \\ X_1 + X_2 - 3X_3 - 4X_4 &= 0 \\ 3X_1 + 6X_2 - 2X_3 + X_4 &= 0 \\ 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 3X_4 &= 0. \end{aligned}$$

الحل : نحسب قيمة محدد المصفوفة A . (وقد حسبناه في المثال السابق).

$|A| = -120$

نستنتج أن لجملة المعادلات المعادلات المفروضة فقط الحل :

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$$

نتيجة : اذا كانت لدينا جملة المعادلات $AX = 0$ و كان $|A| \neq 0$ هذا يعني أن رتبة المصفوفة A تساوي درجتها . و أن كل المعادلات المفروضة هي معادلات أساسية و أن كل الأسطر في هذه المعادلات مستقلة خطيا ، و لجملة المعادلات المفروضة فقط الحل الصفري.

ملاحظتين حول طريقة كرامر :

1ـ بما أن طريقة كرامر تعتمد على حساب قيمة محدد مصفوفة الأمثال A فهي اذا طريقة نستخدمها فقط عندما نكون أمام جملة من المعادلات فيها عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات.

2ـ في حالة ما اذا كان محدد مصفوفة الأمثال $|A| = 0$ هذا يعني أنه لا يوجد حل وحيد لجملة المعادلات المفروضة ، بل هناك حل عام هذا الحل لا يمكن البحث عنه باستخدام طريقة كرامر (سنستخدم التحويلات الأولية كما سنرى فيما بعد).

2ـ طريقة مقلوب المصفوفة :

اذا كانت لدينا جملة المعادلات :

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n &= b_n \end{aligned}$$

فانه يمكن كتابتها بالشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

و باختصار نكتب :

$$AX = B$$

بضرب طرفي هذه المعادلة من اليسار ب A^{-1} فاننا نحصل على :

$$A^{-1} AX = A^{-1} B$$

و بالتالي :

$$X = A^{-1} B$$

مثال ـ1 : حل جملة المعادلات التالية باستخدام الصيغة $X = A^{-1} B$:

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 &= 19 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 &= 3 \\ 6X_1 + 7X_2 - X_3 &= 17 \end{aligned}$$

لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

و منه نجد أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

و منه :

$$X = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} 78 \\ 156 \\ 234 \end{bmatrix}$$

و بالتالي :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اذا : $X_1 = 1 \ , \quad X_2 = 2 \ , \quad X_3 = 3$

مثال ـ2 : حل جملة المعادلات التالية باستخدام الصيغة $X = A^{-1} B$:

$$\begin{aligned} 21\,X_1 + 6\,X_2 + 3\,X_3 + 9\,X_4 &= 5 \\ 12\,X_1 + 16\,X_2 + 36\,X_3 + 4\,X_4 &= -10 \\ 13\,X_1 + 10\,X_2 + 19\,X_3 + 5\,X_4 &= 3 \\ X_1 + 93\,X_2 + 81\,X_3 + 6\,X_4 &= 8 \end{aligned}$$

لدينا :

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 6 & 3 & 9 \\ 12 & 16 & 36 & 4 \\ 13 & 10 & 19 & 5 \\ 1 & 93 & 81 & 6 \end{bmatrix}$$

ان هذه المصفوفة شاذه ($|A| = 0$) و لا يمكن ايجاد مقلوب لها و بالتالي فان جملة المعادلات المفروضة ليس لها حل وحيد و أن رتبة المصفوفة A أقل من درجتها و بالتالي المعادلات المفروضة ليست مستقلة خطيا.

هناك احتمال لوجود حلول عامة (هذا الاحتمال أكيد اذا لم تكن جملة المعادلات متعارضة) هذه الحلول العامة لا يمكن البحث عنها بواسطة الصيغة $X = A^{-1} B$.

ملاحظات حول الصيغة $X = A^{-1} B$:

1ـ لكي يمكن استخدام هذه الصيغة يجب أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات أي

المصفوفة A يجب أن تكون مربعة .

2ـ يجب أن تكون المصفوفة A نظامية لأنها اذا كانت شاذة فلا يمكن ايجاد مقلوب لها .

3ـ هذه الطريقة تبحث فقط على الحل الوحيد فاذا كانت لجملة المعادلات حلول عامة فان هذه الطريقة لا تمكننا من البحث عنها .

4ـ هذه الطريقة نستخدمها فقط في حالة كون جملة المعادلات غير متجانسة $AX = B$ ، لأنه اذا كانت جملة المعادلات متجانسة فان الشعاع $B = 0$ و بالتالي فالنتيجة ستكون عبارة عن الحل الصفري $X = 0$ هذا الحل هو دائما له وجود بالنسبة ل $AX = 0$.

3ـ طريقة التحويلات الأولية :

هذه الطريقة يمكن اعتمادها لحل جميع أنواع المعادلات الخطية متجانسة أم غير متجانسة ، عدد المجاهيل فيها يساوي عدد المعادلات أم لا يساويها .

ففي حالة جملة المعادلات الخطية المتجانسة $AX = 0$ نكتب المصفوفة $[A \mid H]$ حيث $H=0$ و نطبق التحويلات الأولية على هذه المصفوفة بغرض تحويل المصفوفة A سواء الى مصفوفة أحادية (اذا كانت A مصفوفة مربعة) أو باختيار أكبر محدد غير شاذ في هذه المصفوفة و تحويل مصفوفته الجزئية الى مصفوفة أحادية . أو اجراء تحويلات أولية بحيث نرجع المصفوفة A مصفوفة مثلثية الى أعلى (اذا كانت المصفوفة A مربعة) أو الى مصفوفة مثلثية قطريا (مهما كانت A مربعة أم مستطيلة). أمّا اذا كانت جملة المعادلات غير متجانسة فاننا نجري التحويلات الأولية على المصفوفة $[A \mid B]$ ، و كل ما قلناه بالنسبة للمصفوفة $[A \mid H]$ يمكن أن نقوله عن $[A \mid B]$ بالنسبة لكيفية اجراء التحويلات الأولية .

مثال ـ1 :

اذا كانت لديك جملة المعادلات :

$$X_1 + 5X_2 + 0X_3 = 4$$
$$-X_1 + 0X_2 + 3X_3 = 7$$
$$0X_1 + X_2 + X_3 = 3$$

نكتب :

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

هناك امكانيتان لتحويل المصفوفة A، سواء نحولها الى مصفوفة أحادية أم الى مصفوفة مثلثية الى أعلى . لنقم بتحويلها الى مصفوفة أحادية بتطبيق تحويلات أولية .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{-4R_3 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{-R_2 + R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \underset{-5R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \underset{R_3/2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{R_3 + R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{-5R_3 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

هكذا نكون قد حولنا المصفوفة A الى مصفوفة أحادية و ذلك بعد أن أجرينا سلسلة من التحويلات الأولية على المصفوفة $[A \mid B]$.

ينتج أن :

$X_1 = -1$

$X_2 = 1$

$X_3 = 2$

مثال ـ2 : أوجد حلا لجملة المعادلات التالية :

$$X_1 + X_2 = 0$$

$$-X_1 + 2X_2 = -3$$

$$2X_1 + X_2 = 1$$

اذا :

$$[\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

سنقوم بتحويل المصفوفة A الى مصفوفة مثلثية قطريا و ذلك باجراء سلسلة من التحويـــلات الأولية على المصفوفة $[\,A\,|\,B\,]$.

$$\overset{R_1 + R_2}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]} \sim \overset{-2R_1 + R_3}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]} \sim \overset{R_2/3 + R_3}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right]} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

و منه فان جملة المعادلات المفروضة تكافيء جملة المعادلات :

$$X_1 + X_2 = 0$$
$$3X_2 = -3$$

و منه : $X_1 = 1 \quad , \quad X_2 = -1$

3-8- حل جملة معادلات خطية متجانسة :

لجملة المعادلات $AX = 0$ دوما الحل $X = 0$ أي $X_n = 0$ = ... = X_2 = X_1 و يسمى هذا الحل بالحل الصفري.

ففي حالة ما اذا كان عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات $(n = m)$ أي أن مصفوفة الأمثـــال مربعة فان هناك حالتين :

أ- اما أن يكون $|A| \neq 0$ و بالتالي فالمصفوفة A نظامية و رتبة المصفوفة A تساوي درجتها $n = r$ ، و هناك فقط الحل الصفري $X = 0$. و يمكن التأكد من ذلك باستخدام أية طريقـــة

من طرق الحل التي رأيناها سابقا .

ب- اما أن يكون $|A| = 0$ أي المصفوفة A شاذه و رتبة المصفوفة A أقل من درجتها $r < n$ و بالتالي هناك حل آخر غير الحل الصفري يحتوي هذا الحل على $n - r$ من المجاهيل الحرة ، و الحل يكون عن طريق التحويلات الأولية*.

أما اذا كان عدد المعادلات لا يساوي عدد المجاهيل في جملة المعادلات المفروضة $(n \neq m)$ فهناك أيضا حالتين :

أ - اما أن $n < m$ أي عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل هنا يمكن أن تكون رتبة المصفوفة r أقل من n ($n > r$) و بالتالي هناك حل عام فيه $n - r$ من المجاهيل الحرة .

أما اذا كانت $r = n$ فهناك حل وحيد فقط هو الحل الصفري ($X = 0$).

ب- اما أن $m < n$ و بالتالي هناك حلا عاما فيه $n - r$ من المجاهيل الحرة و الحل يكون عن طريق التحويلات الأولية*.

مثال ـ1 : اذا كانت لدينا جملة المعادلات :

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 0$$
$$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$
$$3X_1 + X_2 + 6X_3 = 0$$

نلاحظ أن : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ و بالتالي هناك حلول أخرى الى جانب الحل الصفري، سنبحث عليها بتحويل المصفوفة A الى مصفوفة مثلثية الى أعلى باجراء تحويلات أولية على المصفوفة $[A \mid H]$.

$$[A \mid H] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right] \overset{-2R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right] \overset{-3R_1 + R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{-R_2 + R_3}{\sim}$$

---

* هناك طرق أخرى للحل لم نتعرف عليها .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

هكذا فان رتبة المصفوفة A هي 2 و بالتالي عدد المجاهيل الحرة للحل العام هو :

. $n - r = 3 - 2 = 1$

و جملة المعادلات المفروضة تكافيء جملة المعادلات :

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 0$$
$$-5X_2 - 3X_3 = 0$$

و منه : $X_2 = \frac{-3}{5} X_3$ و $X_1 = \frac{-9}{5} X_3$ و باعطاء قيمة اختيارية لـ X_3 و لتكـــن a ينتج لدينا :

$$X_1 = \frac{-9}{5} a$$

$$X_2 = \frac{-3}{5} a$$

$$X_3 = a$$

مثال ـ2 : أوجد حلا غير الحل الصفري لجملة المعادلات.

$$X_1 + X_2 - 4X_3 + 0X_4 - 4X_5 = 0$$
$$X_1 - X_2 - 2X_3 - 2X_4 - 2X_5 = 0$$
$$X_1 - 3X_2 + 0X_3 - 4X_4 + 0X_5 = 0$$
$$0X_1 + X_2 - X_3 + X_4 - X_5 = 0$$

لنكتب المصفوفة [A | H] و نطبق عليها تحويلات أولية و ذلك لارجاع المصفوفة A الـــى مصفوفة مثلثية قطريا.

$-R_1 + R_2$
$-R_1 + R_3$ $\qquad -2R_2 + R_3$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{R_2/2+R_4}{\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]} \sim \overset{R_2/2}{\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن $r = 2$ و بالتالي فان هناك حلا عاما فيه عدد المجاهيل الحرة يســـــــــاوي : $n - r = 5 - 2 = 3$.

و جملة المعادلات المفروضة تكافيء :

$$X_1 + X_2 - 4X_3 - 4X_5 = 0$$
$$-X_2 + X_3 - X_4 + X_5 = 0$$

و لتكن المجاهيل الحرة هي : X_3 , X_4 , X_5 و بالتالي :

$$X_2 = X_3 - X_4 + X_5$$
$$X_1 = 3X_3 + X_4 + 3X_5$$

نعطي الآن قيما اختيارية لـ : X_3 , X_4 , X_5 و لتكن :

$$X_3 = a$$
$$X_4 = b$$
$$X_5 = c$$

و بالتالي يكون لدينا :

$$X_1 = 3a + b + 3c$$
$$X_2 = a - b + c$$
$$X_3 = a$$
$$X_4 = b$$
$$X_5 = c$$

8-4- حل جملة المعادلة خطية غير متجانسة :

يكون لجملة المعادلات غير المتجانسة $AX = B$ حلا اذا وفقط اذا كان للمصفوفتين A و $[A \mid B]$ نفس الرتبة .

في حالة ما اذا كانت رتبة المصفوفة A تختلف عن رتبة المصفوفة $[A \mid B]$ نقول أن جملة المعادلات متعارضة و ليس لها حل.

فمثلا بالنسبة للمعادلتين :

$$X_1 + X_2 = 5$$
$$2X_1 + 2X_2 = 6$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة الثانية هو عبارة عن ضعف الطرف الأيسر من المعادلة الأولى، في حين أن الطرف الأيمن من المعادلة الثانية ليس ضعفا للطرف الأيمن من المعادلة الأولى، هنا نقول أن هناك تعارض بين المعادلتين.

و لو حاولنا حل هاتين المعادلتين عن طريق التحويلات الأولية مثلا نجد أن :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 5 \\ 2 & 2 & | & 6 \end{bmatrix} \overset{-2R_1 + R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & | & -4 \end{bmatrix}$$

ينتج من السطر الثاني للمصفوفة $[A \mid B]$ أن $0 = -4$! و هذا مستحيل.

في جملة المعادلات $AX = B$ (حيث $P(A) = r = P(A \mid B)$)

يلاحظ أنه اذا كان عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات أي $m = n$ فان هناك حالتين :

أ- اما أن $|A| \neq 0$ و بالتالي فان هناك حلا وحيدا لجملة المعادلات المفروضة .

ب- اما أن $|A| = 0$ و بالتالي هناك حلا عاما فيه $n - r$ من المجاهيل الحرة .

أما اذا كان عدد المجاهيل لا يساوي عدد المعادلات أي $m \neq n$ فان هناك حالتين :

أ- اما أن $m > n$ و بالتالي هناك حلا عاما فيه $n - r$ من المجاهيل الحرة .

ب- أما أن $m < n$ و بالتالي اذا كان $r = n$ فان هناك حلا وحيدا، أما اذا كان $n > r$ فان هناك حلا عاما فيه $n - r$ من المجاهيل الحرة .

مثال -1 : اذا كان لدينا :

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &= 2 \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 &= 1 \\ 4X_1 - 3X_2 - X_3 &= 3 \\ 2X_1 + 4X_2 + 2X_3 &= 4 \end{aligned}$$

ان حل هذه المعادلات يكون عن طريق التحويلات الأولية و ذلك بتحويل المصفوفة A الـــى مصفوفة مثلثية قطريا و اجراء التحويلات الأولية على المصفوفة [A | B] .

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$-3R_1 + R_2$
$-4R_1 + R_3$
$-2R_1 + R_4$ $R_2 / -5$ $11R_2 + R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ينتج أن جملة المعادلات المفروضة تكافيء جملة المعادلات :

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 2$$
$$X_2 + X_3 = 1$$
$$6X_3 = 6$$

و منه :

$$X_3 = 1$$

$$X_2 = 0$$

$$X_1 = 1$$

مثال ـ2 : حل جملة المعادلات :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &= 5 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 &= 2 \\ 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 0X_4 &= 7 \end{aligned}$$

نقوم بتحويل المصفوفة A الى مصفوفة مثلثية قطريا و ذلك باجراء تحويلات أولية على المصفوفة [A | B] .

عند اجراء هذه التحويلات يكون لدينا الشكل النهائي للمصفوفة [A | B] هو :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

ان السطر الأخير من المصفوفة [A | B] يشير الى أن 5 - = 0 ! و هذا مستحيل و جملة المعادلات المفروضة متعارضة و ليس لها حل، و ذلك لأن رتبة المصفوفة A لا تساوي رتبة المصفوفة [A | B]،

$P(A|B) = 3$ بينما $P(A) = 2$

مثال ـ3 : أوجد حلا لجملة المعادلات :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 + 3X_5 &= 1 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 6X_5 &= 2 \\ 3X_1 + 2X_2 - 4X_3 - 3X_4 - 9X_5 &= 3 \end{aligned}$$

الحل :

$-2R_1 + R_2$
$-3R_1 + R_3$ $\qquad$ $R_2/-3 + R_3$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right]$$

و جملة المعادلات المفروضة تكافيء جملة المعادلات :

$$X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 + 3X_5 = 1$$
$$-3X_2 + 6X_3 = 0$$
$$-6X_4 - 18X_5 = 0$$

و بما أن $n = 5$. و $r = 3$ فان هناك حلا عاما لهذه المعادلات عدد المجاهيل الحرة فيه يساوي $n - r = 5 - 3 = 2$ و أخيرا نجد :

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 2a$$
$$X_3 = a$$
$$X_4 = -3b$$
$$X_5 = b$$

ملاحظة : بالنسبة لجملة المعادلات المتجانسة $AX = 0$ يلاحظ أن رتبة المصفوفة A دوما تساوي رتبة المصفوفة $[A \mid B]$ لهذا فان لجملة المعادلات $AX = 0$ دوما حل.

تمارين

1ـ هل يمكن حل جملة المعادلات التالية بتطبيق قاعدة كرامر ؟

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + 3X_3 &= 0 \\ 2X_1 + 5X_2 + 6X_3 &= 0 \end{aligned}$$

لماذا ؟

2ـ نفس السؤال في التمرين ـ 1 بالنسبة لجملة المعادلات :

$$\begin{aligned} 6X_1 + 9X_2 &= 3 \\ 4X_1 + 6X_2 &= 2 \\ 2X_1 + 3X_2 &= 1 \end{aligned}$$

لماذا ؟

3ـ أوجد حلا لجملة المعادلات التالية بتطبيق قاعدة كرامر :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 2X_3 &= -1 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 &= -4 \\ 4X_1 + X_2 + 4X_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 - X_3 &= 4 \\ 3X_1 - 4X_2 - 2X_3 &= 11 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 &= 2 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_5 &= 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 + X_4 + X_5 &= 3 \\ X_1 + X_2 + X_3 + 4X_4 + X_5 &= -2 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 5X_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 - 3X_4 = 0$$
$$3X_1 - X_2 + 11X_3 - 13X_4 = 0$$
$$4X_1 + 5X_2 - 7X_3 - 2X_4 = 0$$
$$13X_1 - 13X_2 + X_3 + 11X_4 = 0$$

4- هل يمكن استخدام الصيغة $X = A^{-1}B$ لحل جملة المعادلات التالية :

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 2$$
$$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 1$$
$$4X_1 - 3X_2 - X_3 = 3$$
$$2X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 4$$

لمـــاذا ؟

5- أوجد حلا لجملة المعادلات التالية باستخدام الصيغة $X = A^{-1}B$.

$$2X_1 + X_2 + 5X_3 + X_4 = 5$$
$$X_1 + X_2 - 3X_3 - 4X_4 = -1$$
$$3X_1 + 6X_2 - 2X_3 + X_4 = 8$$
$$2X_1 + X_2 + 2X_3 - 3X_4 = 2$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 9$$
$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 6$$
$$3X_1 + X_2 + 2X_3 = 8$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$$
$$3X_1 - 2X_2 - 5X_3 + 4X_4 = -30$$
$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 - 3X_4 = -17$$
$$X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 2$$

$$2X_1 - X_2 - X_3 = 2$$
$$X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 10$$
$$X_1 - 2X_2 + 2X_3 = 10$$

$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 31$$
$$5X_1 + X_2 + 2X_3 = 29$$
$$5X_1 - X_2 + X_3 = 10$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 5$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 1$$
$$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 11$$

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 2X_4 = 6$$
$$2X_1 - X_2 - 2X_3 - 3X_4 = 8$$
$$3X_1 + 2X_2 - X_3 + 2X_4 = 4$$
$$2X_1 - 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 8$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 1$$
$$3X_1 - X_2 - X_3 - 2X_4 = -4$$
$$2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 = -6$$
$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 - X_4 = -4$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 5$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 1$$
$$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 11$$

$$-2X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$-2X_1 + X_2 - X_3 = -1$$
$$-2X_1 + X_2 + 5X_3 = 5$$

$$
\begin{aligned}
2X_1 + 6X_2 &= -11 \\
6X_1 + 20X_2 - 6X_3 &= -3 \\
6X_2 - 18X_3 &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 10 \\
5X_1 + 2X_2 + X_3 &= 20 \\
2X_1 + 4X_2 + 2X_3 &= 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 0 \\
2X_1 - X_2 + 3X_3 &= 0 \\
3X_1 + X_2 + 6X_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2X_1 - X_2 - X_3 &= 0 \\
3X_1 + 4X_2 - 2X_3 &= 0 \\
3X_1 - 2X_2 + 4X_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 &= 1 \\
3X_1 - 2X_2 + 2X_3 - 3X_4 &= 2 \\
5X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 &= -1 \\
2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 &= 4
\end{aligned}
$$

6- حل جملة المعادلات التالية عن طريق التحويلات الأولية :

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 0 \\
X_1 + X_2 + X_3 - X_4 &= 4 \\
X_1 + X_2 - X_3 + X_4 &= -4 \\
X_1 - X_2 + X_3 + X_4 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 &= 4 \\
2X_1 + 5X_2 - 2X_3 &= 3 \\
X_1 + 7X_2 - 7X_3 &= 5
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &= 4 \\ 2X_1 + 5X_2 - 2X_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &= 0 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 &= 0 \\ 7X_2 - 4X_3 - 5X_4 &= 0 \\ 2X_1 - 11X_2 + 7X_3 + 8X_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &= 5 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 &= 2 \\ 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 + 3X_5 &= 1 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 6X_5 &= 2 \\ 3X_1 + 2X_2 - 4X_3 - 3X_4 - 9X_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 0 \\ X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 4X_4 &= 0 \\ X_1 \quad 2X_2 + X_3 - X_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &= 2 \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4X_1 - 3X_2 - X_3 &= 3 \\ 2X_1 + 4X_2 + 2X_3 &= 4 \end{aligned}$$

7ـ هل هناك حل غير الحل الصفري لجملة المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &= 0 \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 &= 0 \\ 4X_1 - 3X_2 - X_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 - X_3 &= 0 \\ 3X_1 + 4X_2 - 2X_3 &= 0 \\ 3X_1 - 2X_2 + 4X_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + 5X_2 + X_3 &= 0 \\ -X_1 - X_2 + 3X_3 &= 0 \\ X_2 + X_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 &= 0 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 &= 0 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 &= 0 \\ 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 + 3X_3 &= 0 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 - 4X_2 + 5X_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &= 0 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 &= 0 \\ 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + X_3 - X_4 + X_5 &= 0 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 - 3X_5 &= 0 \\ 3X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 - 2X_5 &= 0 \\ 3X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 - 2X_5 &= 0 \\ 2X_1 - 5X_2 + X_3 - 2X_4 + 2X_5 &= 0 \end{aligned}$$

الفصل التاسع :

جدول المدخلات ـ المخرجات :

9ـ1ـ مفهوم جدول المدخلات ـ المخرجات :

يهدف جدول المدخلات ـ المخرجات الى تصوير الارتباطات بين قطاعات الاقتصاد الوطني و ذلك باعطاء صورة رقمية عن تشكل و توزيع الانتاج الوطني. لقد مرت فكرة تصوير هذه الارتباطات المتبادلة بين قطاعات الاقتصاد الوطني بعدة محاولات مبدأها محاولة الفيزيوقراطي الفرنسي "فرانسوا كيناي" في القرن الثامن عشره من خلال وضعه للجدول الاقتصادي المعروف. ثم جاءت محاولة " كارل ماركس " الذي وضع مخططا لعملية اعادة الانتاج في المجتمع، البسيطة و الموسعة. و جاءت فيما بعد محاولة الاقتصاديين السوفيات لوضع ما يسمى بالموازين الاقتصادية خاصة بالاقتصاد السوفياتي و ذلك سنة 1925.

وكانت فكرة الموازين الاقتصادية هي التي مهدت مباشرة لظهور جدول المدخلات ـ المخرجات من طرف السوفياتي " فاسيلي ليونيتيف " الذي انتقل الى الولايات المتحدة و وضع كتابه الشهير " هيكل الاقتصاد الأمريكي " عام 1941.

لقد انطلق ليونيتيف من فكرة أن انتاج كل قطاع من قطاعات الاقتصاد الوطني يتم استهلاكه بين الاستهلاك الوسيط و الاستهلاك النهائي. حيث يقصد بالاستهلاك الوسيط قيمة تلك المنتجات التي تستخدم في العمليات الانتاجية في صورة مستلزمات سلعية لغرض انتاج السلع النهائية، أما الاستهلاك النهائي فيقصد به تلك المنتجات الصافية التي تبقى في حوزة المجتمع بعد تلبية الاستهلاك الوسيط، أي تلك المنتجات التي توجه الى الاستهلاك النهائي الفردي و الجماعي و كذلك الاستثمار. كما أن انتاج كل قطاع هو عبارة عن مجموع ما يستلمه القطاع من القطاعات الأخرى لتلبية احتياجاته من الاستهلاك الوسيط زائدا القيمة المضافة (الفوائد و الأرباح و الآجار و الأجور).

و فيما يلي نموذج جدول المدخلات ـ المخرجات.

قطاعات الاقتصاد الوطني		قطاعات مستهلكة				الاستهلاك النهائي	الانتاج الاجمالي
		1	2	3	n		
قطاعات منتجة	1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{1n}	Y_1	X_1
	2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{2n}	Y_2	X_2
	3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{3n}	Y_3	X_3
	.	....	....	....	....	.	.
	.	....	....	....	....	.	.
	n	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}	X_{nn}	Y_n	X_n
القيمة المضافة		V_1	V_2	V_3	V_n	-	-
الانتاج الاجمالي		X_1	X_2	X_3	X_n	-	X

من الجدول نجد أن الاقتصاد الوطني مقسم الى n من القطاعات معروضة مرة في صورة عمودية بصفتها قطاعات منتجة و مرة في صورة أفقية بصفتها قطاعات مستهلكة.*

لو نظرنا الى الجدول أفقيا نجد أن السطر الأول مثلا يتكون من :

X_{11} ـ قيمة ما يسلمه القطاع الأول لنفسه ، X_{12} ـ قيمة ما يسلمه القطاع الأول الى القطاع الثاني، X_{13} ـ قيمة ما يسلمه القطاع الأول الى القطاع الثالث.... X_{1n} ـ قيمة ما يسلمه القطاع الأول الى القطاع n ، ثم Y_1 ـ الاستهلاك النهائي من منتجات القطاع الأول. أخيرا نجد X_1 و هو عبارة عن مجموع ما قدمه القطاع الأول للقطاعات الأخرى زائدا قيمة الاستهلاك النهائي. اذا X_1 هو عبارة عن الانتاج الاجمالي للقطاع الأول منضورا اليه من زاوية العرض. و هكذا بالنسبة لبقية الأسطر الأخرى.

أما لو نظرنا الى الجدول عموديا، الى العمود الأول مثلا نجد أن :

X_{11} ـ قيمة ما يستلمه القطاع الأول من نفسه ، X_{21} ـ قيمه ما يستلمه القطاع الأول من القطاع

* : ان درجة تفصيل الجدول الى عدد معين من القطاعات يرجع الى الغرض من اعداده و الى القدرة على توفير البيانات.

الثاني، X_{31} ـ قيمة ما يستلمه القطاع الأول من القطاع الثالث........، X_{n1} ـ قيمة ما يستلمه القطاع الأول من القطاع n . ثم نجد V_1 ـ القيمة المضافة للقطاع الأول. و أخيرا X_1 هو عبارة عن الانتاج الاجمالي منظورا اليه من زاوية الطلب.

و هكذا بالنسبة لبقية الأعمدة الأخرى. وتجدر الاشارة الى أن الجدول يغطي العمليات لفترة زمنية معينة عادة سنة .

2-9- الصياغة الرياضية لجدول المدخلات - المخرجات :

عند النظر الى الجدول من زاوية العرض (حسب الأسطر) يمكننا تشكيل المعادلات التالية :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \ldots\ldots + X_{1n} + Y_1 = X_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots\ldots + X_{2n} + Y_2 = X_2$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + \ldots\ldots + X_{3n} + Y_3 = X_3$$
$$\cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} + \ldots\ldots + X_{nn} + Y_n = X_n$$

هذه المعادلات يمكن كتابتها باختصار :

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i$$

أما عند النظر الى الجدول من زاوية الطلب (حسب الأعمدة) فانه يمكننا تشكيل المعادلات التالية :

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \ldots\ldots + X_{n1} + V_1 = X_1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \ldots\ldots + X_{n2} + V_2 = X_2$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + \ldots\ldots + X_{n3} + V_3 = X_3$$
$$\cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \ldots\ldots + X_{nn} + V_n = X_n$$

و بالتالي يمكن الكتابة :

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + V_j$$

يلاحظ أن الانتاج الوطني الاجمالي (مجموع الانتاج الاجمالي لـ n قطاع) يمكن كتابته بطريقتين :

1) بجمع أسطر الجدول أي :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

2) بجمع أعمدة الجدول أي :

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + \sum_{j=1}^{n} V_j$$

و منه فان :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + \sum_{j=1}^{n} V_j$$

و بما أن :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$$

(كنا قد برهنا على ذلك في الفقرة الثالثة من الفصل الأول).

و بالتالي :

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

و هذا يعني اقتصاديا أن الاستهلاك النهائي في المجتمع يتطابق مع القيمة الجديدة المولّدة من عملية الانتاج. و بمعنى آخر فان الجانب الأيمن من المعادلة هو عبارة عن قيمة الانتاج المحلي منضورا اليه من زاوية الانتاج،
أما الطرف الأيسر فهو أيضا عبارة عن قيمة الانتاج المحلي منضورا اليه من زاوية الانفاق.

9-3- المعاملات الفنية المباشرة للانتاج :

يطلق على العناصر a_{ij} $(i,j = 1,2...n)$ بالمعاملات الفنية المباشرة لانتاج حيث $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ و هي تعني مقدار المدخلات اللازمة من انتاج القطاع i لانتاج وحدة واحدة

في القطاع j .

و لهذه المعاملات الفنية المباشرة للانتاج الخصائص التالية :

1- $a_{ij} \geqslant 0$ و ذلك من أجل جميع قيم i و j .

2- ليس لها وحدة قياس.

3- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = (a_{11}+a_{12}+a_{13}+\dots+a_{1n}) \leqslant 1$ ، و هذا المجموع يساوي 1 فقط

في حالة ما اذا كان الاستهلاك النهائي من منتجات هذا القطاع كان معدوما أي كل ما أنتج أستهلك في صورة مستلزمات وسيطة .

4- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = (a_{11}+a_{21}+a_{31}+\dots+a_{n1}) < 1$ ، هذا المجموع دوما أقل من 1 ،

لأن عملية الانتاج لا يمكن أن تتم بدون عمل حي أي بدون قيمة مضافة .

من العلاقة $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ ينتج أن $X_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$.

و منه فان جملة المعادلات السابقة الخاصة بجدول المدخلات ـ المخرجات من منظور العرض يمكن كتابتها كالتالي :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n + Y_1 \\
X_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n + Y_2 \\
X_3 &= a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + \dots + a_{3n} X_n + Y_3 \\
&\dots \\
&\dots \\
X_n &= a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \dots + a_{nn} X_n + Y_n
\end{aligned}
$$

و باختصار نكتب :

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i$$

هذه الصيغة الأخيرة تدعى بالنموذج الاقتصادي ـ الرياضي لجدول المدخلات ـ المخرجات، ويمكن كتابتها في الشكل المصفوفي التالي :

$$X = AX + Y$$

حيث : X ـ شعاع الانتاج الاجمالي ،

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

A ـ مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة للانتاج،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Y ـ شعاع الطلب النهائي ،

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

من العلاقة : $X = AX + Y$

نجد أن : $X - AX = Y$

و منه : $[I-A]\, X = Y$

و أخيرا : $X = [I-A]^{-1} . Y$

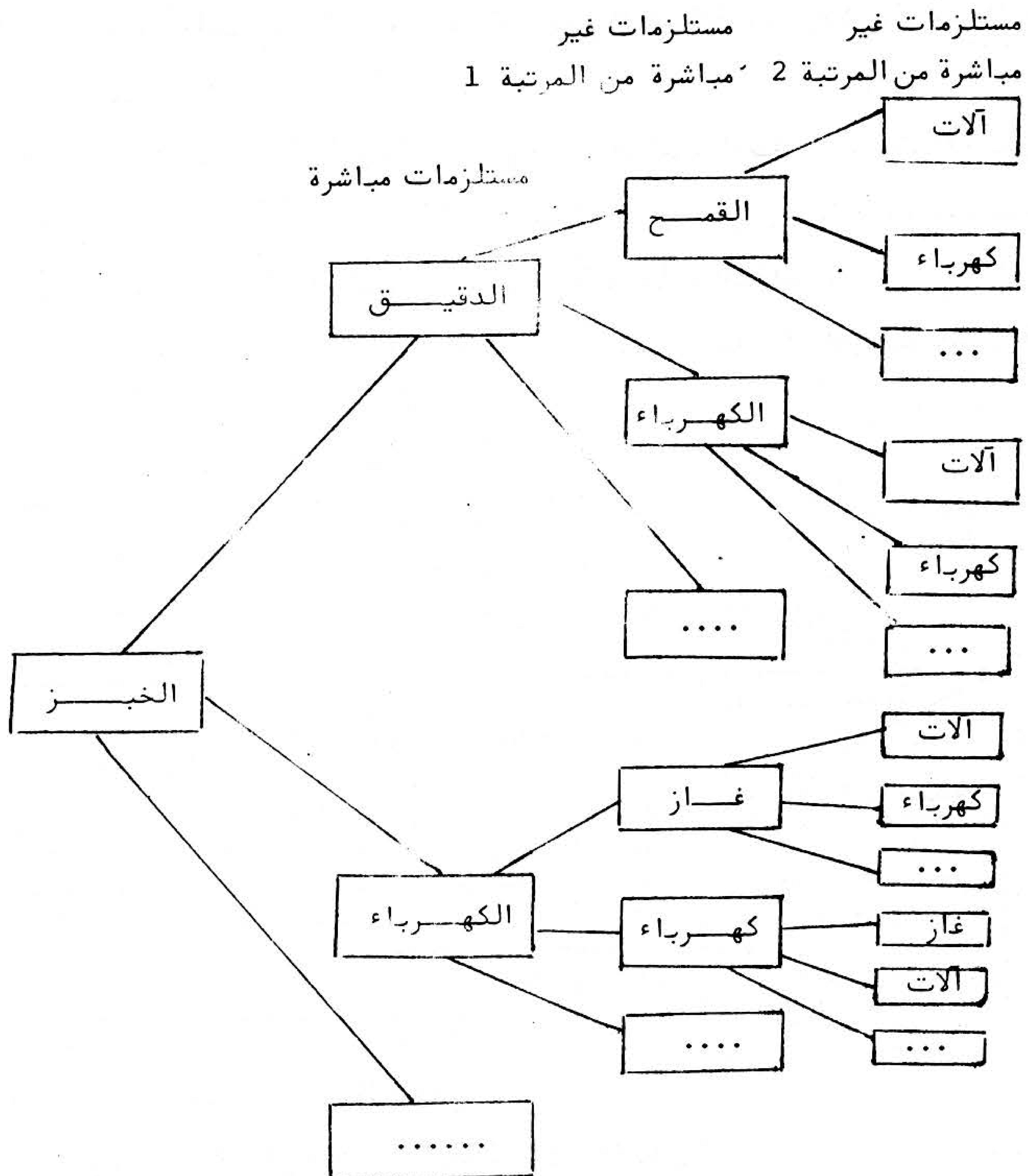
حيث I مصفوفة أحادية من درجة المصفوفة A .

9ـ4ـ معاملات النفقات الكلية للانتاج :

اذا كانت عناصر المصفوفة $A = [a_{ij}]$ تعبر عن النفقات المباشرة للانتاج فان عناصر المصفوفة $[I - A]^{-1} = [b_{ij}]$ تعبر عن النفقات الكلية للانتاج، أي النفقات المباشرة زائدا النفقات غير المباشرة . و تدعى المصفوفة $[I - A]^{-1}$ بمصفوفة النفقات الكلية للانتاج .

و المعنى الاقتصادي للنفقات الكلية للانتاج نوضحه من خلال المثال التالي.

لنتتبع مختلف النفقات اللازمة لانتاج مادة الخبز مثلا :



ان انتاج مادة الخبز تتطلب عدة مدخلات مباشرة ، منها الدقيق، الكهرباء، الزيت، الملح، و مواد أخرى و انتاج الدقيق بدوره يتطلب نفقات أخرى مثل القمح و الكهرباء و مواد أخرى.. هذه النفقات الأخيرة تعتبر نفقات مباشرة بالنسبة لانتاج الدقيق و لكنها بالنسبة لانتاج الخبز فهي مستلزمات غير مباشرة من المرتبة 1، أما المستلزمات غير المباشرة من المرتبة 2

لانتاج مادة الخبز فهي تلك المستلزمات السلعية اللازمة لانتاج القمح من آلات وكهرباء ...الخ.
و اذا أردنا معرفة كل النفقات المباشرة و غير المباشرة من مادة ما و ليكن الكهرباء مثلا
و ذلك من أجل انتاج وحدة واحدة من الخبز، علينا أن نجمع كل النفقات من الكهرباء المباشرة
و غير المباشرة من جميع المراتب،
و هو ما تعبر عنه عناصر المصفوفة $[I-A]^{-1}$. ينتج أن عناصر هذه المصفوفة لا يمكن أن تكون
سالبة أي أن $0 \leqslant b_{ij}$ لجميع قيم i و j . و العناصر b_{ij} تعني مقدار النفقات
الكلية اللازمة من انتاج القطاع i لانتاج وحدة واحدة من منتجات القطاع j .
ان مجالات الاستخدام لجداول المدخلات - المخرجات عديدة فهو يستخدم لاغراض المحاسبة
الوطنية و التخطيط و التنبؤ... الخ.

مثال : اذا كانت لديك المعلومات التالية عن اقتصاد ما.

(مليون دج)

قطاعات مستلمة / قطاعات منتجة	زراعة	صناعة	الطلب النهائي	الطلب الاجمالي (الانتاج الاجمالي)
زراعة	500	350	150	1000
صناعة	320	360	120	800
الانتاج الاجمالي	1000	800	-	1800

المطلوب : 1- حساب القيمة المضافة لكل قطاع.
2- تحديد قيمة الانتاج اللازم تحقيقه في كل قطاع في السنة المقبلة اذا توقع
أن الطلب النهائي على منتجات الزراعة و الصناعة سيتغير من :

$\begin{bmatrix} 150 \\ 120 \end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$. مع افتراض ثبات المعاملات الفنية للانتاج.

الحل : 1- لدينا :

$$X_j = \sum_{i=1}^{2} X_{ij} + V_j$$

اذا :

$$V_j = X_j - \sum_{i=1}^{2} X_{ij}$$

$V_1 = 1000 - (500 + 320) = 180$ مليون دج

$V_2 = 800 - (350 + 360) = 90$ مليون دج

2ـ نبدأ بحساب مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة للانتاج :

لدينا $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ اذا :

$$a_{11} = \frac{500}{1000} = 0,50$$

$$a_{12} = \frac{350}{800} = 0,43$$

$$a_{21} = \frac{320}{1000} = 0,32$$

$$a_{22} = \frac{360}{800} = 0,45$$

اذا :

$$A = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,43 \\ 0,32 & 0,45 \end{bmatrix}$$

و بالتالي :

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,50 & 0,43 \\ 0,32 & 0,45 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,50 & -0,43 \\ -0,32 & 0,55 \end{bmatrix}$$

و منه :

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 4,02 & 3,1 \\ 2,3 & 3,06 \end{bmatrix}$$

نستخدم الآن العلاقة $X = [I - A]^{-1} Y$ لتحديد قيمة الانتاج اللازم انتاجه في كل قطاع لمواجهة الطلب المتوقع في السنة المقبلة :

اذا :

$$X = \begin{bmatrix} 4,02 & 3,1 \\ 2,3 & 3,06 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1114 \\ 820 \end{bmatrix}$$

$X_2 = 820,\ X_1 = 1114$

تمارين

1- اذا كان لدينا جدول المدخلات - المخرجات في اقتصاد ما كالتالي :

قطاعات مستلمة / قطاعات منتجة	صناعة	زراعة	قطاعات أخرى
صناعة	360	600	300
زراعة	240	560	450
قطاعات أخرى	500	570	250
القيمة المضافة	900	990	1500

المطلوب : 1- تحديد شعاع الانتاج الاجمالي لكل قطاع.

2- تحديد شعاع الطلب النهائي على منتجات كل قطاع.

3- حساب مصفوفة المعاملات الفنية مع التعليق الاقتصادي على عناصرها :

a_{33} , a_{32} , a_{31} , a_{23} .

4- اذا قدر أن شعاع الطلب النهائي في السنة المقبلة هو :

$$\begin{bmatrix} 1090 \\ 1500 \\ 1325 \end{bmatrix}$$

و اعتبرنا أن المعاملات الفنية للانتاج تبقى ثابتة . المطلوب حساب الانتاج الجديد الذي يجب أن ينتجه كل قطاع.

5- حساب ما يجب أن يسلمه كل قطاع للقطاع الآخر و لنفسه في السنة المقبلة .

2- اذا أعطي جدول المعاملات الفنية المباشرة كذلك الطلب النهائي على منتجات كل قطاع كالتالي :

قطاعات مستلمة / قطاعات منتجة	صناعة	زراعة	قطاعات أخرى	الطلب النهائي (مليون دج)
صناعة	0,30	0,25	0,20	56
زراعة	0,15	0,12	0,03	20
قطاعات أخرى	0,10	0,05	0,08	12

المطلوب : 1ـ تحديد الانتاج الاجمالي لكل قطاع.

2ـ حساب القيمة المضافة لكل قطاع.

3ـ حساب قيمة الانتاج الاجمالي.

4ـ اذا استهدفت الخطة زيادة الطلب النهائي في السنة المقبلة الى $\begin{bmatrix} 70 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$

المطلوب تحديد حجم الانتاج الذي يجب أن يحققه كل قطاع

لمواجهة الطلب النهائي الجديد.

ـ اذا كان لديك الجدول التالي حول الاقتصاد الوطني :

قطاعات مستلمة / قطاعات منتجة	زراعة	صناعة	قطاعات أخرى	الطلب النهائي	الطلب الاجمالي
زراعة	50	160	0	290	500
صناعة	150	80	60	110	400
قطاعات أخرى	100	40	90	70	300
القيمة المضافة	200	120	150	-	-
الانتاج الاجمالي	500	400	300	-	1200

(الوحدة مليون دج)

المطلوب : 1ـ حساب مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة.

2ـ حساب مصفوفة معاملات النفقات الكلية.

3ـ اذا توقعنا ان الطلب النهائي على المنتجات الصناعية سيرتفع في العام المقبل من 110 الى 160 فما هو اجمالي الانتاج الذي يجب أن يحققه كل قطاع لمواجهة هذا التغيير. مع افتراض ثبات المعاملات الفنية للانتاج.

4ـ أعطي جدول المدخلات ـ المخرجات لسنة الأساس كالتالي :

الوحدة مليون دج

قطاعات مستلمة / قطاعات منتجة	صناعة	زراعة	الطلب النهائي	الطلب الاجمالي
صناعة	60	40	100	200
زراعة	40	50	10	100
قيمة مضافة	100	10	-	-
الانتاج الاجمالي	200	100	-	300

المطلوب : 1ـ أحسب مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة لسنة الأساس.

2ـ اذا استهدفت الخطة زيادة الطلب النهائي في الصناعة بنسبة 70 % و 50 % بالنسبة للزراعة للسنة المقبلة فما هي قيمة الانتاج الاجمالي في الصناعة و الزراعة التي يجب على المخطط أن يحددها حتى يضمن التوازن في السنة المقبلة مع افتراض ثبات المعاملات الفنية للانتاج.

3ـ أحسب ما ينبغي أن يسلمه كل قطاع للقطاع الآخر و لنفسه أيضا في السنة المقبلة.

ـ اذا أعطيت لك البيانات التالية حول اقتصاد بلد ما في شكل جدول للمدخلات ـ المخرجات :

قطاعات منتجة \ قطاعات مستلمة	1	2	3
1	19,70	29,82	49,54
2	9,85	9,94	29,72
3	59,12	29,82	9,91
الانتاج الاجمالي	197,05	248,47	396,3

المطلوب : 1ـ تأكد من خلال هذا الجدول أن : $\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} X_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} X_{ij}$

حيث X_{ij} ـ مقدار ما يسلمه القطاع i الى القطاع j .

2ـ أحسب المقدار : $\sum_{j=1}^{3} X_{1j}$ ، و ما معناه اقتصاديا.

3ـ أحسب المقدار : $\sum_{i=1}^{3} X_{i2}$ ، و ما معناه اقتصاديا.

4ـ أحسب القيمة المضافة المحققة في كل قطاع.

5ـ أحسب مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة.

6ـ أحسب مقدار الطلب النهائي على منتجات كل قطاع (في شكل مصفوفة).

6ـ اذا أعطى الجدول التالي لاقتصاد يتكون من أربعة قطاعات انتاجية :

قطاعات مستلمة / قطاعات منتجة	المعاملات الفنية المباشرة I	II	III	IV	الانتاج النهائي
I	0,20	0,10	0,06	0,20	318
II	0,05	0,20	0,04	0,15	76
III	0,10	0,05	0,04	0,10	67,5
IV	0,20	0,10	0,10	0,05	62

1ـ حساب مصفوفة معاملات الانتاج الكلية .

2ـ حساب قيمة الانتاج الاجمالي لكل قطاع.

3ـ حساب القيمة المضافة المحققة في كل قطاع.

4ـ اذا استهدفت الخطة زيادة في الانتاج الاجمالي لكل قطاع بنسبة 10 ٪ في السنة المقبلة . المطلوب : تحديد الطلب النهائي على منتجات كل قطاع في السنة المقبلة مع افتراض ثبات المعاملات الفنية للانتاج.

7ـ بافتراض أن a_{ij} هي عبارة عن المعاملات الفنية المباشرة للانتاج و b_{ij} عبارة عن المعاملات الكلية للانتاج في جدول المدخلات ـ المخرجات.

المطلوب : التعليق عن صحة أو خطأ المتراجحات التالية :

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} b_{ij} < 1 \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \leqslant 1\end{array}\right\}$$

الفصل العاشر

تحليل الانحدار

10-1- مفهوم الانحدار : يعود استخدام كلمة الانحدار كمفهوم احصائي الى فرانسيس ڨالطون (ابن عم شارل داروين) الذي اطلع على كتاب داروين " أصل الأنواع " عام 1859، مما أدى به الى طرح التساؤل التالي : لماذا لا يختلف الناس كثيرا من جيل الى آخر من حيث الشكل الخارجي و من حيث قدراتهم الطبيعية ؟ هذا التساؤل أدى به الى الاهتمام بموضوع الوراثة و قد تناول بالتحديد دراسة علاقة طول الأبناء بطول الوالدين. من حيث المنطق الأبناء يكونوا في كل مرّة مشابهين لوالديهم ، الوالدين الطوال يولد لديهم أبناء طوال و الوالدين القصار يولد لديهم أبناء قصار ، و لو استمر هذا المنطق فاننا سنحصل لا محالة بعد عدد من الأجيال على جيل من العمالقة و جيل من الأقزام ، غير أن الدراسات الاحصائية التي أجراها ڨالطون لم تدل على وجود هذا الاتجاه بل بالعكس فالأبناء عند الوالدين القصار يولدون أطول و الأبناء عند الوالدين الطوال يولدون أقصر ، زيادة على ذلك فان انحراف طول الأبناء هوّ أقل من انحراف طول والديهم عن الطول المتوسط في العينة المدروسة . هذه الحركة الى الخلف في اتجاه الوسط الحسابي سماها ڨالطون بالانحدار TO REGRESS - الحركة في اتجاه معاكس، و في سنة 1885 كتب ڨالطون مقالة مشهورة تحت عنوان " الانحدار نحو المتوسط العام في دراسة الأطوال ".

اذا كلمة الانحدار كمفهوم احصائي استخدم أولا في البيولوجيا و كان مفهومه محدود و يستخدم فقط عندما يتعلق الأمر باتجاه الظاهرة المدروسة الى التراجع، و فيما بعد انتشر استخدام مفهوم الانحدار ليعنى بدراسة العلاقات الاحصائية بين الظواهر و تحديد شكل العلاقة بين الظاهرة المدروسة Y و العوامل المفسرة لها ، في شكل معادلة رياضية ، كما اتسع استعمال هذا النوع من التحليل في العلوم الأخرى خاصة في العلوم الاقتصادية .

ففي دراسة حول انتاجية العمل في الصناعات التحويلية بالجزائر (Y) و مجموعة من العوامل المفسرة عددها ثمانية ، تم التوصل من خلال البيانات الاحصائية الخاصة بالفترة 1969 - 1985 الى نموذج الانحدار التالي :

$$\hat{Y} = 37,553 + 0,002\ X_4 + 3,300\ X_5 + 1,\ 116\ t$$

حيث X_4 - تسليح العمل، X_5- متوسط الأجر الشهري للعامل في قطاع الصناعات التحويلية ، t - عامل الزمن.

بقية العوامل $X_1, X_2, X_3, X_6, X_7, X_8$ تبين من خلال الاختبارات الاحصائية أنها غير معنوية بالتالي حذفت من النموذج.

و لما كانت دراسة العلاقة بين الظواهر لا تكتفي بوضع معادلة الانحدار بل تتطلب أيضا اجراء مختلف اختبارات المعنوية و كذا قياس شدة الارتباط فيما بين العوامل المفسرة، و بين العوامل المفسرة والظاهرة المدروسة ـ Y ، لذلك فقد أصبح تحليل الارتباط عملا مكملا لتحليل الانحدار و أصبح يستخدم مفهوم تحليل الانحدار و الارتباط ليعني جميع مراحل دراسة العلاقات الاحصائية بين الظواهر بدأ من تحديد الهدف من الدراسة الى تحديد العوامل المفسرة للظاهرة المدروسة الى جمع البيانات الاحصائية حول $Y_1\ X_1\ X_2 \ldots X_m$ ، الى اختيار شكل معادلة الانحدار ثم تقدير معالم معادلة الانحدار و أخيرا قياس شدة الارتباط و اجراء الاختبارات الاحصائية المختلفة حول دقة النموذج.

هنا سوف لن نتناول كل هذه المراحل كما سوف لن نتناول فرضيات النموذج باعتبار أنها تقع خارج نطاق موضوعنا* و سوف نقتصر على تناول مبدأ المربعات الصغرى و استخدام جبر المصفوفات لتقدير معلمات معادلة الانحدار.

2-10- تقدير معادلة الانحدار البسيط وفقا لمبدأ المربعات الصغرى

بفرض أن شكل معادلة الانحدار من النوع الخطي البسيط : $Y_i = B_0 = B_1\ X_i + e_i$

حيث e_i قيمة عشوائية تسمى بالباقي و هي تعبر عن خطأ التقدير أي الفرق بين القيم الفعلية Y_i و المقدرة $\hat{Y}_i$.

بالتالي فان معادلة الانحدار المقدرة تكتب كالتالي : $\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1\ X_i$

اذا :

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

(*) : للتفصيل في موضوع تحليل الانحدار و الارتباط يمكن الرجول الى :

(1) : ابراهيم العيسوي، القياس و التنبؤ في الاقتصاد، دار النهضة العربية، القاهرة 1978.

(2) : عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي.ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 79.

(3) : فروخي جمال، نظرية الاقتصاد القياسي. ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 1993.

(4) : J.JOHNSTON, Econometric Méthods, Manchester, LONDON 1963. Mc Graw-Hill

ان مبدأ المربعات الصغرى في تقدير معادلة الانحدار يقوم على أساس جعل مجموع مربع الانحرافات $\sum e_i^2$ أصغر ما يمكن أي :

$$SSE^{*} = \sum e_i^2 = (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

بالتعويض عن $\hat{Y}$ حيث : $\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$ يصبح لدينا :

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)^2$$

ان المستقيم المقدر بواسطة المربعات الصغرى يتوقف على معالم معادلة الانحدار، فبالنسبة لمعادلة الانحدار الخطي البسيط $\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X$ فان :

$$SSE = f (\hat{B}_0 , \hat{B}_1)$$

و مبدأ المربعات الصغرى يقوم على أساس اختيار القيمتين $\hat{B}_0 , \hat{B}_1$ بحيث يكون المقدار $\sum e_i^2$ أقل ما يمكن، ان ذلك ممكن تحقيقه بواسطة اجراء اشتقاقات جزئية للمقدار $\sum e_i^2$ بالنسبة لـ: $\hat{B}_0 , \hat{B}_1$ و جعلها مساوية للصفر.

لدينا : $SSE = \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)^2$

اذا :

$$\frac{\partial (\sum e_i^2)}{\partial \hat{B}_0} = -2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial (\sum e_i^2)}{\partial \hat{B}_1} = -2 \sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

و منه نحصل على المعادلتين الطبيعيتين :

$$\sum Y_i = n \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2$$

و بالتالي :

$$\hat{B}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum Y_i \sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

(*) : SSE - SUM OF SQUARES OF ERRORS.

$$\hat{B}_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X\ Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \sum X_i\ Y_i - \sum Y_i \sum X_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

الى هنا لم تبرز الحاجة الملحة الى استخدام جبر المصفوفات باعتبار أن الانحدار الخطي البسيط لا ينطوي سوى على حل معادلتين بمجهولين.

10ـ 3ـ تقدير معادلة الانحدار المتعدد وفقا لمبدأ المربعات الصغرى

يقصد بالانحدار المتعدد دراسة العلاقة الاحصائية بين الظاهرة المدروسة ـ Y ، و العوامل المفسرة لها $X_1, X_2, \ldots X_m$ و وضع هذه العلاقة في شكل معادلة تسمى بمعادلة الانحدار المتعدد، أو نموذج الانحدار العام.

و الى جانب العوامل النظامية $X_1, X_2, X_3 \ldots X_m$ يبقى هناك دائما مجال لقيمة عشوائية e_i لتعبر عن :

1ـ أخطاء القياس.

2ـ العوامل الأخرى التي لم تأخذ بالاعتبار في النموذج لسبب أو لآخر.

3ـ الفرق بين الشكل الحقيقي لمعادلة الانحدار و الشكل المتبني.

ان شكل معادلة الانحدار الخطي المتعدد تكتب كالتالي :

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \ldots\ldots + B_m X_m + e$$

و تكتب في شكلها المصفوفي :

$$Y = X B + e$$

أما معادلة الانحدار المقدرة فتكتب :

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2 + \ldots\ldots + \hat{B}_m X_m$$

و تكتب في شكلها المصفوفي :

$$\hat{Y} = X \hat{B}$$

طبقا لمبدأ المربعات الصغرى يمكننا أن نكتب :

$$SSE = \sum e^2 = (Y - \hat{Y})^2 = (Y - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_1 - \hat{B}_2 X_2 - \ldots - \hat{B}_m X_m)^2$$

و باستخدام الكتابة المصفوفية فان :

$$SSE = \sum e^2 = e'e = (Y - \hat{Y})' (Y - \hat{Y})$$

$$= (Y - X\hat{B})' (Y - X\hat{B}) = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B}$$

و باعتبار أن : $SSE = \sum e^2 = f(\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2 \ldots \hat{B}_m)$

اذا نشتق المقدار : $\sum e^2$ بالنسبة للشعاع $\hat{B}$ و نحصل على :

$$\frac{\partial (e'e)}{\partial \hat{B}} = -2X'Y + 2X'X\hat{B}$$

و بجعل : $-2X'Y + 2X'X\hat{B} = 0$

ينتج أن : $X'X\hat{B} = X'Y$

بضرب طرفي هذه المعادلة من اليسار في $(X'X)^{-1}$ نحصل على :

$$(X'X)^{-1} X'X\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

و بالتالي :

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

و باعتبار حجم العينة n و عدد العوامل المفسرة m فان :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots\ldots\ldots & X_{1m} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \ldots\ldots\ldots & X_{2m} \\ 1 & X_{31} & X_{32} & \ldots\ldots\ldots & X_{3m} \\ \vdots & & & & \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \ldots\ldots\ldots & X_{nm} \end{bmatrix}_{n \times (m+1)}$$

---

e' هو منقول الشعاع e كذلك بالنسبة لـ : $(Y-\hat{Y})'$ فهو منقول $(Y-\hat{Y})$.

العمود الأول في المصفوفة X يعبر عن عامل وهمي X_0 المقابل للمعامل $\hat{B}_0$ في معادلة الانحدار حيث $X_{i0} = 1$ من أجل جميع قيم i ، ($i = 1, 2, \ldots n$).

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_m \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 \cdots\cdots & \sum X_m \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 \cdots\cdots & \sum X_1 X_m \\ \vdots & & \\ \sum X_m & \sum X_1 X_m \cdots\cdots & \sum X_m^2 \end{bmatrix}$$

حيث X' هوّ منقول المصفوفة X .

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum Y X_1 \\ \sum Y X_2 \\ \vdots \\ \sum Y X_m \end{bmatrix}$$

مثال : اذا كانت لدينا البيانات التالية حول مستوى انتاجية العمل Y مستوى مكننة العمل X_1 ، متوسط عمر العاملين X_2 ، النسبة المتوسطة لتنفيذ معدل الانتاج X_3 ، معطاة في الجدول التالي :

المصانع	مستوى انتاجية العمل طن/سا Y	مستوى مكننة العمل % X_1	متوسط عمر العاملين سنة X_2	النسبة المتوسطة لتنفيذ معدل الانتاج % X_3
1	20	32	33	127
2	24	30	31	120
3	28	36	41	116
4	30	40	39	117
5	31	41	46	106
6	33	47	43	128
7	34	56	34	109
8	37	54	38	114
9	38	60	42	115
10	40	55	35	121
11	41	61	39	110
12	43	67	44	111
13	45	69	40	108
14	48	76	41	113

من الجدول لدينا :

$$Y = \begin{bmatrix} 20 \\ 24 \\ 28 \\ 30 \\ 31 \\ 33 \\ 34 \\ 37 \\ 38 \\ 40 \\ 41 \\ 43 \\ 45 \\ 48 \end{bmatrix}_{14 \times 1} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 32 & 33 & 127 \\ 1 & 30 & 31 & 120 \\ 1 & 36 & 41 & 116 \\ 1 & 40 & 39 & 117 \\ 1 & 41 & 46 & 106 \\ 1 & 47 & 43 & 128 \\ 1 & 56 & 34 & 109 \\ 1 & 54 & 38 & 114 \\ 1 & 60 & 42 & 115 \\ 1 & 55 & 35 & 121 \\ 1 & 61 & 39 & 110 \\ 1 & 67 & 44 & 111 \\ 1 & 69 & 40 & 108 \\ 1 & 76 & 41 & 113 \end{bmatrix}_{14 \times (3+1)}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 14 & 724 & 546 & 1615 \\ 724 & 40134 & 28533 & 82884 \\ 546 & 28533 & 21544 & 62840 \\ 1615 & 82884 & 62840 & 186891 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \qquad X'Y = \begin{bmatrix} 492 \\ 26907 \\ 19384 \\ 56389 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

لدينا العلاقة : $B = (X'X)^{-1} \; X'Y$

نحسب مقلوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$ باحدى الطرق المعروفة و نجدها تساوي :

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 52,88929 & 0,06869 & -0,26929 & -0,33608 \\ -0,06869 & 0,00052 & -0,00034 & 0,00048 \\ -0,26929 & -0,00034 & 0,00489 & 0,00083 \\ -0,33603 & 0,00048 & 0,00083 & 0,00242 \end{bmatrix}$$

إذا :

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,05729 \\ 0,52123 \\ 0,15092 \\ -0,02389 \end{bmatrix}$$

3)- اذا كانت لديك البيانات التالية :

السنــة	انتاجية العمل (ألف دج) Y_t	معامل استخدام الطاقة الانتاجية (٪) X_1	الوزن النوعي للأصول الثابتة المستغلة (٪) X_2	الاستثمـارات (مليون دج) X_3
1984	60	77,2	63,3	1,7
1985	60	77,2	63,6	1,8
1986	64	78,0	63,8	1,9
1987	65	78,3	64,2	1,8
1988	66	78,6	64,1	2,0
1989	67	78,9	64,4	2,0
1990	65	79,1	64,4	2,2
1991	68	79,4	64,8	2,4
1992	69	79,7	64,9	2,4
1993	72	80,2	65,4	2,5

المطلوب : تقدير معادلة الانحدار بفرض أنها من الشكل :

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2 + \hat{B}_3 X_3$$

مع تفسير معالم هذه المعادلة .

قائمـــــة المراجـــــع

1ـ د. أحمد الأشقر ، الاقتصاد الرياضي، جامعة حلب. 1978 ـ 1977.

2ـ د. الهام حمصي، المصفوفات، منشورات جامعية حلب 1978 ـ 1977.

3ـ د. عصام عزيز شريف، تحليل المدخلات ـ المخرجات، ديوان المطبوعات الجامعيـــة ـ الجزائر 1983.

4ـ د. نبيل عطية عويس : أصول الاقتصاد الرياضي، كلية التجارة جامعة قناة السويس.

5- ALFRED HILBERT., Matrizenrechnung, Berlin 1977.

6- DEMIDOVITCH, I. MARON., Elément de calcul numérique. Mir-Moscou 1979.

7- EDMOND BERREBÌ., mathématiques exercices corigés avec rappels de cours dunod 1975. Tome 1, 2, 3.

8- FRANK AYRES JR., Matrices cours et problèmes, série shaum 1983.

9- Mac DUFFEE C.C., The théory of matrices. Berlin 1933.

10- S.R. SEARLE, W.H. HAUSMAN, Matrix algebra for business and économics cornell University, 1970.

11- А. И. КАРАСЕВ, Н. Ш. КРЕМЕР., МАТUМАТUЧЕСКUЕ МЕТОДЫ U МОДЕЛЫ В ПЛАНUРОВАНUU. ЭКОНОМUКА, МОСКВА, 1987.

12- И. Д. МОЗОРОВ., МАТРUЧНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТАТUСТUКЕ. МОСКВА, 1983.

13-E. FÖRSTER, B. RÖNZ. METHODEN DER KORRELATIONS - UND REGRESSIONSANALYSE. BERLIN 1979.

14-J.JOHNSTON. ECONOMETRIC METHODS, MANCHESTER Mc GRAW-HILL ENGLAND 1963.

فهـــــــرس

مقدمــــــة :

الصفحــــة

أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية - بن عكنون
الجزائر